2/5/2016

$\exists$ isometrie che non sono trasformazioni lineari; ad esempio: una traslazione di vettore $v \neq 0$, mantiene le distanze, ma non è lineare.

Siamo interessati agli operatori lineari isometrici

CERCHIAMO LE ISOMETRIE PER IL PIANO: consideriamo le matrici ortogonali 2x2:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Imponiamo alle colonne di essere ortonormali; abbiamo così il sistema

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Risolviamolo:

Supponiamo $b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ \frac{c^2 d^2}{b^2} + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ c^2(d^2 + b^2) = b^2 \\ d^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} '' \\ c^2 = b^2 \\ d^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} '' \\ c = \pm b \\ '' \end{cases} \Rightarrow$ consideriamo $c = b \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ a = -d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$

Se $c = -b \Rightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = d \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow$ poniamo $a = \cos\vartheta$ e $b = \operatorname{sen}\vartheta$ $\quad 0 < \vartheta < \pi$ $(b \neq 0)$

$\Rightarrow$ le matrici risultano

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Se $b = 0 \Rightarrow \begin{cases} cd = 0 \\ d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ d = \pm 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$ abbiamo le matrici

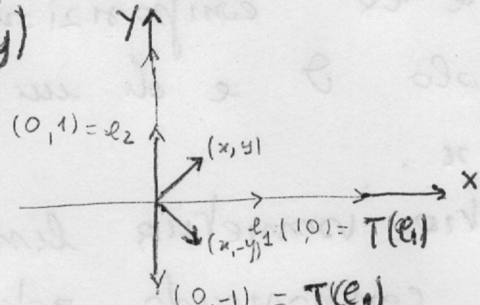
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

non ci sono altre possibilità.

Analizziamo geometricamente gli operatori associati a tali matrici:

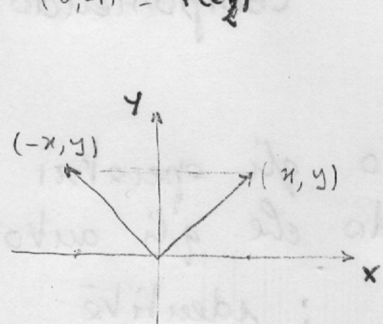
1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è ovviamente associato all'identità

2) $T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$



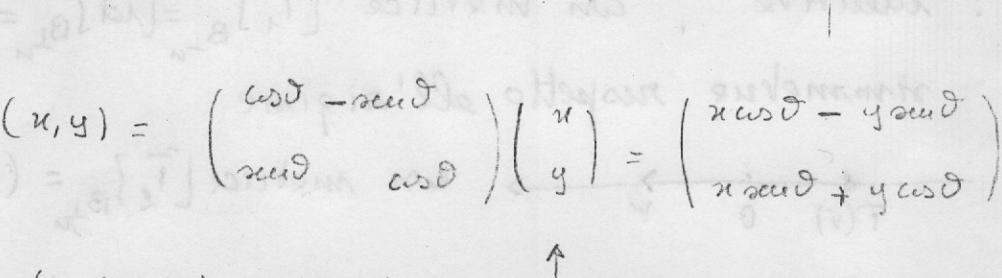
T è la <u>SIMMETRIA</u> rispetto all'asse x (o <u>RIBALTAMENTO rispetto all'asse x</u>)

3) $T(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$



<u>RIBALTAMENTO all'asse y</u> <u>rispetto</u>

4) $T(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta \\ x\operatorname{sen}\vartheta + y\cos\vartheta \end{pmatrix}$



T è <u>ROTAZIONE</u> attorno all'origine di un angolo

5) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ può essere considerato come una rotazione di angolo $\vartheta = \pi$

6) Se analizziamo l'ultima matrice ancora non trattata

$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$ vediamo che è il prodotto di

$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, cioè la trasformazione cercata è la composizione di una rotazione di angolo ϑ e di un ribaltamento rispetto all'asse x.

Ogni altra isometria lineare nel piano è dunque ottenuta componendo rotazioni e ribaltamenti

Quali sono gli operatori isometrici su $\mathbb{R}$? $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ricordando che gli autovalori sono $+1$ e -1, abbiamo:

$T_1(x) = x$: identità, con matrice $[T_1]_{B_{\perp n}} = [id]_{B_{\perp n}} = (1)$

e $T_2(x) = -x$: simmetria rispetto all'origine

T_2 : 

con matrice $[T_2]_{B_{\perp n}} = (-1)$

TEOREMA DI STRUTTURA PER GLI OPERATORI ISOMETRICI

Dato $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore isometrico $\Rightarrow \exists$ una base ortonormale $B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & M_1 & & \\ & 0 & & & & & & M_2 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & M_k \end{pmatrix}$$

con $M_j = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_j & -\operatorname{sen}\vartheta_j \\ \operatorname{sen}\vartheta_j & \cos\vartheta_j \end{pmatrix}$

$j = 1, \dots, k$

Quindi la matrice ha prima tutti 1 sulla diagonale poi tutti meno uno, poi tutte matrici 2x2 fatte come indicato (matrici simmetriche Rotazione)

ad esempio in R^3 possono esistere

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} = I, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(2)}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(4)}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}_{(5)}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}_{(6)}$$

(1) $|I| = 1$ (2) $|A_2| = -1$ (3) $|A_3| = 1$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

può essere considerato un suo caso particolare

può essere considerato un suo caso particolare

(6) composizione di A_2 e A_5

anche in R^3 possiamo ricondurre tutte le isometrie in due categorie: rotazione e simmetria rispetto ad un piano