02/03/2016

$\exists$ sottospazi invarianti che non sono autospazi:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto (x, y, -z)$

$$[T]_C^C : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A \quad P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

Radici: $\lambda_0 = 1 \quad \mu_1 = 2 \qquad \mathrm{Spec}(A) = \{1, 1, -1\}$

$\lambda = -1 \quad \mu_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{ -2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ \\ E_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \text{Autospazi}$$

~~Tutti gli endomorfismi~~ $\mathbb{R}^3$ è sottospazio invariante, è anche autospazio? No

ovvero devo far vedere che $\mathbb{R}^3$ non è legato ad un unico scalare λ, che manda un suo elemento$_\lambda$ in un suo multiplo.

$\in$ al Dominio

$E_1 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 1 \cdot v \}$ $\Leftarrow$ $\nexists$ un unico scalare che manda tutto $\mathbb{R}^3$ in un insieme di multipli legati ad uno stesso scalare.

$E_{-1} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = -1 \cdot v \}$

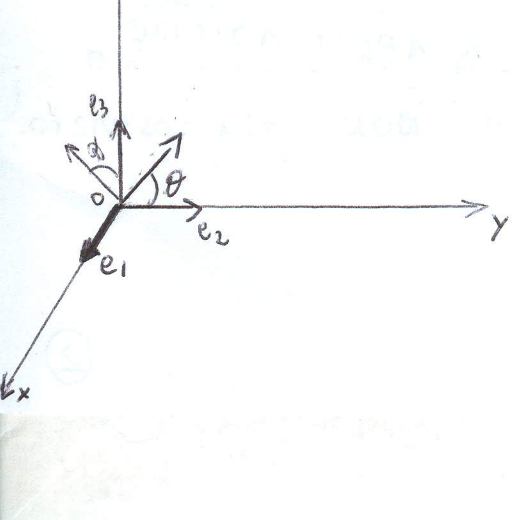
$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Sia C la base canonica $\Rightarrow [T]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$T(\alpha e_1) = \alpha T(e_1) = \alpha e_1$

Autospazio relativo all'autovalore 1

il 1° vettore di base viene mandato in se stesso

$T(e_1) = e_1$



T È LA ROTAZIONE DI ANGOLO ϑ, CON $0 < \vartheta < \pi$, ATTORNO ALL'ASSE x

$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ con $0 < \theta < \pi$

La 1^a coordinata è nulla $\Rightarrow$ lavoriamo nel piano $x=0$ IN QUANTO il vettore ruota nel piano $x=0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ Anche in questo caso lavoriamo nel piano $x=0$

le immagini dei vettori giacciono nel sottospazio vettoriale di partenza

Il piano $x=0$ è sottospazio invariante, è autospazio?

CERCHIAMO GLI AUTOSPAZI DELLA ROTAZIONE, CALCOLANDO GLI AUTOVALORI

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)(\cos^2\theta + \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + \sin^2\theta) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1) = 0$$

$$\lambda = \frac{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}}{1}$$

$\cos^2\theta - 1$ è sempre < 0 $\Rightarrow$ in $\mathbb{R}$ non ci sono soluzioni DELL'EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

L'unico autovalore reale esistente è $\lambda = 1$

CERCHIAMO L'AUTOSPAZIO RELATIVO A $\lambda = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta-1 & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta-1 \end{pmatrix} \quad rgA = 2 \Rightarrow \dim Sol = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta-1 & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} (\cos\theta-1)y - (\sin\theta)z = 0 \\ (\sin\theta)y + (\cos\theta-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ho un sistema lineare omogeneo in 2 eq. e 2 incognite

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Asse } X \text{ in } \mathbb{R}^3$$

Sottospazio invariante non banale che ~~[illegible]~~ È RELATIVO ALL'AUTOVALORE $\lambda = 1$, E_1.

QUESTO È L'UNICO AUTOSPAZIO DI QUESTA APPLICAZIONE QUINDI IL SOTTOSPAZIO INVARIANTE $x=0$ NON È AUTOSPAZIO!

Def Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è detta diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale D, cioè se $\exists$ una matrice invertibile S tale che $D = S^{-1}AS$ $\quad (A = SDS^{-1})$

Def Un operatore $T: V \to V$ con V spazio vettoriale reale n-dimensionale è detto diagonalizzabile se $\exists$ una base dello spazio V B tale per cui $[T]_B^B = D$ (con D matrice diagonale).

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile? POSSIAMO CERCARE DIRETTAMENTE SE ESISTONO LE MATRICI D ED S TALI CHE $D = S^{-1}AS$:

Posta $S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ invertibile (cioè $x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0$) e determinata

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

: se il sistema ha soluzione allora la M è diagonalizzabile

OSSERVAZIONE:
Tutte le matrici diagonali sono diagonalizzabili (basta prendere come S la matrice identità)

OSSERVAZIONE:
se T è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists$ B base di V tale che:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0\, d_n \end{pmatrix}$$

Posta $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, LA MATRICE CI DICE CHE

$T(v_1) = d_1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = d_1v_1$;

$\Rightarrow v_1$ e gli altri VETTORI DI BASE sono autovettori

$T(v_2) = 0v_1 + d_2v_2 + \dots + 0v_n = d_2v_2$; E COSÌ VIA. $\Rightarrow$

PROPOSIZIONE

- T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ una base B di V tale che ~~costituita~~ B è costituita da autovettori

DIM "$\Rightarrow$" appena dimostrata sopra

"$\Leftarrow$" $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base costituita da autovettori $\Rightarrow$

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Quindi $[T]_B^B$ è diagonale ~~diagonalizzabile~~ E PERTANTO T È DIAGONALIZZABILE

ESSENDO:
$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$
$\vdots$
$T(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

c.v.d

ANALIZZIAMO IL SIGNIFICATO DELLA MATRICE S NELLA SIMILITUDINE:

$$\begin{tikzcd}
(V, C) \arrow[r, "T"', "A"] & (V, C) \arrow[d, "S^{-1}"', "id"] \\
(V, B) \arrow[u, "id", "S"'] \arrow[r, "T", "D"'] & (V, B)
\end{tikzcd}$$

con $[T]_C^C = A$

$D = S^{-1}AS$

con $[T]_B^B = D$

LE COLONNE DI S SONO costituita dai vettori di base di B (autovettori)

- <u>Proposizione</u> $T: V \to V$ è diagonalizzabile $\iff$ detti $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ gli autovalori relativi a T

$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_q} = V$ o analogamente

$\sum_{j=1}^{q} \dim E_{\lambda_j} = n$

- <u>Lemma</u> La somma di due autospazi è diretta

<u>DIM</u> Vogliamo dimostrare che presi λ_1, λ_2 autovalori di un operatore

$T: V \to V$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, $\underline{E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}}$ =>

sia $w \in (E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2})$ $w \neq 0$ $T(w) = \lambda_1 w \wedge T(w) = \lambda_2 w$ $\quad \lambda_1 w = \lambda_2 w$

$(\lambda_1 - \lambda_2) w = 0$ $\quad$ w non può essere $= 0$ poiché per definizione un autovettore è $\neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ $\quad$ ho un assurdo

la somma di due sottospazi sarà quindi diretta $\quad$ c.v.d.

<u>DIM</u> DELLA PROPOSIZIONE "$\Rightarrow$" T è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists$ base B di V costituita da autovettori; $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ E SIANO $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ GLI AUTOVALORI DISTINTI DI T

Sia E_j il sottospazio generato dai vettori di base relativi all'autovalore λ_j $\forall j = 1, \dots, q$, POICHÈ

$E_j \subseteq E_{\lambda_j} \Rightarrow V = (E_1 + \dots + E_q) \subseteq (E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_q}) = (E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_q})$

$\Rightarrow V = \bigoplus_{j=1}^{q} E_{\lambda_j}$

il viceversa si dimostra in modo analogo ~~~~

"$\Leftarrow$" se $V = \bigoplus_{j=1}^{q} E_{\lambda_j}$ si prende una base di ogni E_{λ_j} e si uniscono tali basi fino ad ottenere una base di V $\Rightarrow$ T è diagonalizzabile

- <u>Proposizione</u> Sia $T: V \to V$ operatore su di uno spazio V n-dimensionale

T è diagonalizzabile $\iff$ il polinomio caratteristico di T, $p(\lambda)$ ha tutte le radici nel campo su cui operiamo e la dimensione di E_{λ_j} ~~~~; $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall$ autovalore λ_j $\quad j = 1, \dots, q$

DIM T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \sum \dim E_{\lambda_j} = n$. ~~Poiché~~

Poiché $\dim E_{\lambda_j} \leq \mu(\lambda_j)$ e $\dim E_{\lambda_j} \geq 1 \Rightarrow$

$\sum_{j=1}^{q} \dim E_{\lambda_j} \leq \sum_{j=1}^{q} \mu(\lambda_j) = n \Leftrightarrow$ tutte le radici di $p(\lambda)$ stanno nel campo su cui operiamo. Quindi $\Leftrightarrow \dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)\ \forall i = 1, \dots q$

cvd