# Teorema di struttura per gli operatori isometrici di uno spazio euclideo

Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore isometrico

$\Rightarrow \exists$ una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale la matrice associata a $T$ ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & & M_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & M_\ell \end{pmatrix}$$

con $M_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\operatorname{sen}\vartheta_i \\ \operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}$ $\quad i = 1, \ldots, \ell$

Dimostrazione: per induzione su $n$ = dimensione dello spazio

1) $n = 1$ $\quad T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ : gli unici operatori isometrici su $\mathbb{R}$ sono $T(x) = x$ ( l'identità ) e $T(x) = -x$ ( simmetria rispetto all'origine ) e le matrici associate in base canonica sono $A = (1)$ e $A = (-1)$

2) Supponiamo il teorema dimostrato per dimensione dello spazio ambiente $< n$ e dimostriamolo per dimensione $n$.

Consideriamo il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e una sua radice $\lambda_0$:

se $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = +1$ o $\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ consideriamo un autovettore $v \in E_T(\lambda_0)$, che possiamo prendere di norma unitaria $\Rightarrow T(v) = \pm v \Rightarrow \mathcal{U} = \langle\langle v \rangle\rangle$ è invariante per T e ha dimensione 1 $\rightarrow \mathcal{U}^\perp$ è invariante per T e ha dimensione $n-1 \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ e posso considerare $T|_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \longrightarrow \mathcal{U}^\perp$: per tale operatore il teorema è dimostrato per ipotesi di induzione $\Rightarrow$ esiste in $\mathcal{U}^\perp$ una base ortonormale, $\mathcal{B}_1$, rispetto alla quale la matrice $[T|_{\mathcal{U}^\perp}]_{\mathcal{B}_1}$ ha la forma richiesta dal teorema

Ora prendiamo come base di $\mathbb{R}^n = \{v\} \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ è ortonormale e $[T]_{\mathcal{B}}$ ha dunque la forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & [T|_{\mathcal{U}^\perp}]_{\mathcal{B}_1} \end{pmatrix}$$

richiesta dal teorema.

Sia ora $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = \alpha + i\beta$; dimostriamo che esiste un sottospazio invariante di dimensione 2.

Considero il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ una sua radice con $\beta \neq 0$; sia $A - \lambda_0 I$ con $A = [T]_{\text{canonica}}$

$\Rightarrow p_T(\lambda_0) = |A - \lambda_0 I| = 0 \Rightarrow$ Il sistema lineare omogeneo

$(A - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ha una soluzione non banale $Z = Z_x + i Z_y \in \mathbb{C}^n$

con $Z_x, Z_y \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ posto $[Z_x]_e = X$ e $[Z_y]_e = [Y]$

abbiamo $(A - \lambda_0 I)(X + iY) = 0$

$$A(X+iY) = \lambda_0 I (X+iY)$$

$$A(X+iY) = (\alpha + i\beta) I (X+iY) = (\alpha+i\beta)(X+iY)$$

$$AX + iAY = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y)$$

$\Rightarrow$ devono essere uguagliate le parti reali e le parti immaginarie dei due numeri complessi

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta Z_y \\ T(Z_y) = \beta Z_x + \alpha Z_y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $V := \langle\langle Z_x, Z_y \rangle\rangle$ = sottospazio generato dai vettori $Z_x$ e $Z_y$ è invariante per $T$, poiché $T(V) \subseteq V$

Dimostriamo che $Z_x$ e $Z_y$ sono linearmente indipendenti:

Per assurdo, supponiamo $Z_y = \lambda Z_x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1)\; T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta \lambda Z_x = (\alpha - \beta\lambda) Z_x \\ 2)\; T(Z_y) = T(\lambda Z_x) = \lambda T(Z_x) = \beta Z_x + \alpha(\lambda Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases}$$

moltiplichiamo 1) per $\lambda$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1')\; \lambda T(Z_x) = (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x \\ 2)\; \lambda T(Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases} \Rightarrow \text{ uguagliamo i secondi membri}$$

$$\Rightarrow (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \Rightarrow$$

$$-\beta\lambda^2 Z_x = \beta Z_x \Rightarrow -(\beta\lambda^2 + \beta) Z_x = 0 \quad \text{ma } Z_x \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\beta(\lambda^2 + 1) = 0$ : ma $\beta \neq 0$ perché $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 + 1 = 0$ $\Rightarrow$ assurdo perché $\lambda \in \mathbb{R}$ !

$\Rightarrow$ $Z_X$ e $Z_Y$ sono linearmente indipendenti

e quindi $\dim V = \dim \langle\langle Z_X, Z_Y \rangle\rangle = 2$ : posso considerare

$\mathcal{B}_V = \{Z_X, Z_Y\}$ $\Rightarrow$ e $T_1 = T|_V$ abbiamo che

$$[T_1]_{B_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A_2$$

Inoltre sappiamo che $\alpha^2+\beta^2 = 1$, perché è la norma dell'autovalore $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, che essendo autovalore di un operatore isometrico, deve avere norma unitaria

$\Rightarrow$ $T_1$ è invertibile e $[T_1^{-1}]_{B_V} = [T_1]_{B_V}^{-1} =$

$$= A_2^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^{-1} = A_2^T$$

$\Rightarrow$ $A_2$ è ortogonale

$T_1 = T|_V$ è un operatore isometrico su $V$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
T_1(Z_X)\cdot Z_X &= Z_X \cdot T_1^{-1}(Z_X) \\
(\alpha Z_X - \beta Z_Y)\cdot Z_X &= Z_X \cdot (\alpha Z_X + \beta Z_Y)
\end{aligned}$$

$$\alpha\cancel{(Z_X\cdot Z_X)} - \beta(Z_Y\cdot Z_X) = \alpha\cancel{(Z_X\cdot Z_X)} + \beta(Z_X\cdot Z_Y) \Rightarrow \beta(Z_X\cdot Z_Y) = 0$$

essendo $\beta \neq 0$ $\Rightarrow$ $Z_X\cdot Z_Y = 0$ $\Rightarrow$ $Z_X$ e $Z_Y$ sono ortogonali

Si dimostra che $\|Z_X\|^2 = \|Z_Y\|^2$:

$$\begin{aligned}
T_1(Z_X)\cdot Z_Y &= Z_X \cdot T_1^{-1}(Z_Y) \\
(\alpha Z_X - \beta Z_Y)\cdot Z_Y &= Z_X\cdot(-\beta Z_X + \alpha Z_Y)
\end{aligned}$$

$$\alpha\cancel{(Z_X\cdot Z_Y)} - \beta(Z_Y\cdot Z_Y) = \alpha\cancel{(Z_X\cdot Z_Y)} - \beta(Z_X\cdot Z_X) \Rightarrow \cancel{\beta}\|Z_Y\|^2 = \cancel{\beta}\|Z_X\|^2$$

$\Rightarrow$ posto $\|Z_x\| = \|Z_y\| = \mu \neq 0$, prendiamo come base $B'_V$ dello spazio $V$, formata dai vettori ortonormali $W_1$ e $W_2$ con $w_1 = \frac{Z_x}{\mu}$ e $w_2 = \frac{Z_y}{\mu}$ ; avremo $[T_1]_{B'_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

poiché $T_1(w_1) = \frac{1}{\mu} T(Z_x) = \alpha \frac{Z_x}{\mu} - \beta \frac{Z_y}{\mu} = \alpha w_1 - \beta w_2$

e $T_1(w_2) = \frac{1}{\mu} T(Z_y) = \beta \frac{Z_x}{\mu} + \alpha \frac{Z_y}{\mu} = \beta w_1 + \alpha w_2$

$$\Rightarrow [T_1]_{B_V'} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Considero $V^\perp$, invariante per $T$, e per ipotesi di induzione, essendo $\dim V^\perp = n-2$, esiste una base ortonormale $B_{V^\perp}$, rispetto alla quale la matrice $\left[T|_{V^\perp}\right]_{B_{V^\perp}}$ ha la forma richiesta.

Ora considero in $\mathbb{R}^n$ la base $B_{V^\perp} \cup B'_V = B \Rightarrow$ la matrice associata a $T$ in tale base sarà:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \left[T|_{V^\perp}\right]_{B_{V^\perp}} & \\ & \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

come volevasi dimostrare. ∎