29/09/14

MATRICI

<u>Definizione</u> Una matrice è una tabella di numeri ordinati in righe e colonne. <u>Esempio</u> 3 righe, 2 colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$ → parentesi di solito tonde, oppure una barra, oppure parentesi quadre a rovescio

È una matrice formata da 3 righe e 2 colonne $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

insieme matrici — indice di righe — indice di colonne

Una generica matrice reale (le entrate (numeri e righe e colonne) sono numeri reali) formata da p righe ed n colonne si indica così: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}} = (a_{ij})_{p\times n}$

i = indice righe
j = indice colonne

<u>Matrice rettangolare</u> = numeri di righe e colonne diversi

<u>Matrice quadrata</u> = matrice del tipo $A = (a_{ij})_{n\times n}$

Una matrice 1×1 è costituita dal singolo scalare: $a = (a)$ $a \in \mathbb{R}$

[forma matrici ricalcano caratteristiche matrici] e forme di rettangolo se sono rettangolari, ~~ra~~ e forme di quadrato se sono quadrate]

DIAGONALE = In una matrice quadrata l'insieme delle entrate a_{ii} $i = 1,\dots n$ costituisce la <u>diagonale principale</u> (quadrata perché i doppi indici devono coincidere)

Esempio In $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ la diagonale principale (da sinistra a destra) è formata dalle entrate 1, 5, 9

$1 = a_{11}$ (prima riga, prima colonna); $7 = a_{31}$

In una matrice quadrata $n \times n$ l'insieme delle entrate a_{ij} con $i+j=n+1$ costituisce la diagonale secondaria (Nell'esempio la somma degli indici deve dare 6)

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ MATRICE ORDINE 5

a_{ij} con $i+j=6$

a_{15}

a_{24}

a_{33}

a_{42}

a_{51}

Una matrice quadrata è detta DIAGONALE se le ~~entrate~~ uniche entrate eventualmente non nulle sono a_{ii} $i=1,\dots,n$ (elementi sulla diagonale non nulli; tutti gli altri nulli)

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

MATRICE NULLA è la matrice quadrata $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = (0)_{n \times n}$ => tutte le entrate nulle (sopra e sotto diagonale principale)

Una matrice quadrata è detta TRIANGOLARE SUPERIORE se le entrate eventualmente non nulle sono del tipo a_{ij} con $i \le j$ ~~per~~, per $i,j=1,\dots,n$ (solo entrate superiore alla diagonale E QUELLE DELLA DIAGONALE POSSONO ESSERE DIVERSE DA ZERO.)

Una matrice quadrata è detta TRIANGOLARE INFERIORE se le entrate eventualmente non nulle sono del tipo a_{ij} ~~con~~ con $i \ge j$ per $i,j=1,\dots,n$ (solo entrate inferiori alla diagonale e QUELLE DELLA DIAGONALE POSSONO ESSERE DIVERSE DA ZERO.)

• Nella matrice triangolare anche la diagonale può essere nulla

Es. TRIANG. SUPERIORE $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → sulla diagonale possono essere sia nulli che non nulli.

Es TRIANG. INFERIORE $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ANALIZZIAMO sempre a livello insiemistico l'insieme delle matrici, matrici simmetriche. Possiamo parlare di una matrice quadrata è detta SIMMETRICA se $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j = 1, \dots, n$

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 3X3 indici da 1 a 3 → sulla diagonale $a_{i,i}$ nessun problema perché

Si chiama simmetrica perché gli elementi simmetrici alla diagonale principale sono uguali.

INSIEME DELLE MATRICI $A = (a_{ij})_{p \times n}$ a livello insiemistico È INDICATO CON $M_{p \times n}(\mathbb{R})$. ABBIAMO ANALIZZATO DIVERSE MATRICI. ORA CONSIDERIAMO ALCUNE

OPERAZIONI TRA MATRICI

ADDIZIONE

Insieme di tutte le matrici $p \times n$ È VISTO COME UN ~~sottoinsieme~~ SOTTOINSIEME DELL'INSIEME DI TUTTE LE MATRICI.

Nell'insieme delle matrici reali $p \times n$, $M_{p \times n}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ si può sottintendere), introduciamo l'addizione:

addizione è una legge che ASSOCIA una matrice ad una COPPIA DI MATRICI

DOMINIO (DI TALE APPLICAZIONE) È PRODOTTO CARTESIANO $M_{p \times n} \times M_{p \times n}$ (lavoriamo su coppie di matrici, ORDINATE).

ADDIZIONE: $\mathcal{M}_{p \times n} \times \mathcal{M}_{p \times n} \longrightarrow \mathcal{M}_{p \times n}$

$(A, B) \longmapsto C = A + B$

operazione: · BINARIA (agisce su coppie)

· ~~PRIMA~~ INTERNA (sempre dentro $\mathcal{M}_{p \times n}$ CHE È IL CODOMINIO DELL'APPLICAZIONE.)

OPERAZIONE BINARIA INTERNA così definita:

poste $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{lm})_{\substack{l=1,\dots,p \\ m=1,\dots,n}}$

indice numero naturale sempre → si utilizzano lettere latine minuscole $m, n, p, l, \dots$

$\Rightarrow C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$

ESEMPIO $\underbrace{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{STESSO INSIEME, } \mathcal{M}_{3 \times 2}} \Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

! SOMMA TRA MATRICI È DIVERSA DA SOMMA TRA NUMERI REALI, SONO INSIEMI DIVERSI (si dovrebbe adoperare un ~~altro~~ simbolo diverso da "+") !

- Nello svolgere l'addizione tra ~~elementi~~ matrici si sommano numericamente le entrate con gli stessi indici (cioè che stanno nello stesso posto)

· PROPRIETÀ ADDIZIONE

- ASSOCIATIVA: L'insieme gode della proprietà associativa?

cioè $(A+B)+C = A+(B+C)$ $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{p \times n}$

|tre matrici qualunque|

è valida per ogni matrice dello stesso insieme

| $\forall$ = quantificatore universale |
| $\exists$ = quantificatore esistenziale |

simboli di logica matematica

DIMOSTRAZIONE

Siano ~~[illegible]~~ $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$ $B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$

$C=(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow \underbrace{(A+B)}_{D}+C=$

$D+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$

$A+\underbrace{(B+C)}_{E}=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$

MATRICI ~~[illegible]~~ COINCIDONO QUANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI COINCIDONO ~~[illegible]~~

$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\ \forall i,j$

Sono uguali perché questo è somma ~~[illegible]~~ dei numeri reali e vale proprietà associativa per essa

$\Rightarrow$ vero perché la somma tra numeri reali gode della proprietà associativa

$\Rightarrow$ non importa ordine di somma tra le entrate.

- COMMUTATIVA. Vale?
  L'addizione tra matrici gode della proprietà commutativa e quindi $A+B=B+A\ \forall A,B\in M^{\mathbb{R}}_{p\times n}$
  (perché vale PER LA SOMMA TRA numeri reali)
- ELEMENTO NEUTRO = MATRICE NULLA
  L'elemento neutro = $0=(0)_{p\times n}$
- ELEMENTO OPPOSTO = ~~[illegible]~~
  Data $A=(a_{ij})\Rightarrow \exists\ B=(b_{ij})$ tale che $A+B=0$ $\Rightarrow$

=> tale matrice ~~si dice~~ "OPPOSTO DI A" si indica con

$-A = (-a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$

(IN CUI È INTRODOTTA UNA OPERAZIONE

~~OPERAZIONE~~ ~~ADDIZIONE~~ UN INSIEME che gode ~~[illegible]~~ delle le proprietà ENUNCIATE COSTITUISCE UNA STRUTTURA ALGEBRICA DETTA |GRUPPO| ~~[illegible]~~ (poiché è valida operazione)

~~poiché~~ Siccome ~~[illegible]~~ gode della proprietà commutativa allora è GRUPPO ABELIANO (da Abel) o COMMUTATIVO

MOLTIPLICAZIONE

Metodo per moltiplicare = RIGHE per COLONNE

~~[illegible]~~
~~ESTERNA~~