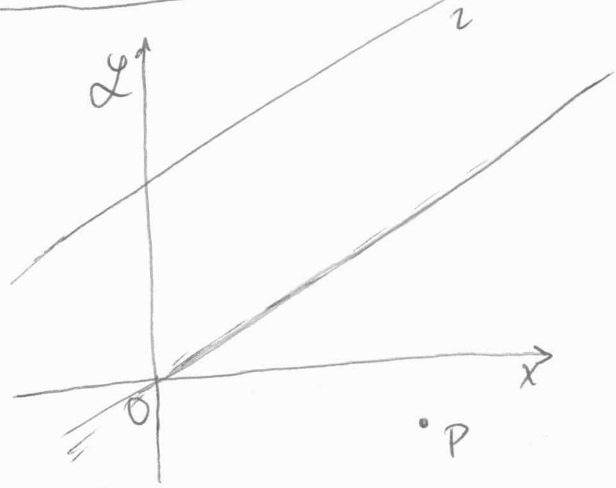
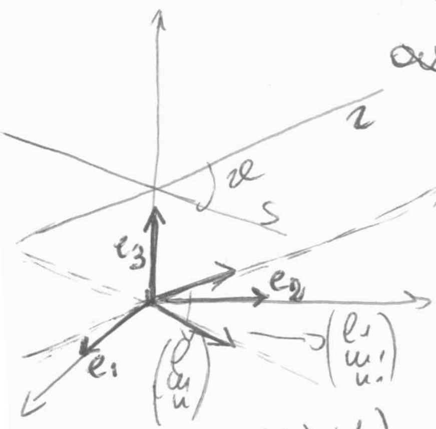
• Distanza di un punto da una retta nel piano



Da ricavare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$ax+by+cz+d$



$v \cdot w = \|v\| \, \|w\| \cdot \cos \widehat{vw}$

Se cerco coseno dell'angolo compreso tra v e w lo trovo: $\cos \widehat{vw} = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}$

NEL CASO DELLA RICERCA DEI COSENI DIRETTORI DI UNA RETTA r:

$$\cos \widehat{re_1} = \frac{\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\|(l,m,n)\|} = \pm \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos \widehat{re_2} = \pm \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos \widehat{re_3} = \pm \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

coseno direttore della retta rispetto asse x

coseno direttore retta rispetto asse y

coseno direttore retta rispetto asse z

• coseno dell'angolo compreso tra due rette r, s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \widehat{rs} = \pm \frac{(ll_1+mm_1+nn_1)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

• Perpendicolarità tra due rette nello spazio

$\boxed{r \perp s \iff ll_1+mm_1+nn_1=0}$: Due rette sono perpendicolari se il prodotto scalare tra i ~~parametri~~ vettori di BASE DELLE direzioni è nullo.

ESEMPIO

Sia data $r: \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$ cerco una retta s perpendicolare ad r

Ricavare i parametri direttori di r

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow l=-3 \quad m=1 \quad n=-2 \Rightarrow \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Prendere i minori togliendo una colonna

$\Rightarrow$ richiedo che i parametri direttori di s, (con $s \perp r$) che pongo $= \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$, soddisfino $-3l_1 + m_1 - 2n_1 = 0$: ci sono infinite soluzioni. le soluzioni formano un piano $\Rightarrow$ ci sono ∞ rette NE RICAVIAMO UNA.

• Rette e piani nello spazio

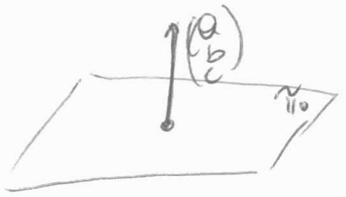
$\pi: ax+by+cz+d=0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$: QUANDO LA RETTA r ED IL PIANO π SONO PERPENDICOLARI?

$\tilde{\pi}_0: ax+by+cz=0 \leftarrow$ CONSIDERO LA GIACITURA DEL PIANO:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

POICHÉ TALE PRODOTTO SCALARE È NULLO:

L'equazione della giacitura del piano dà subito le coordinate di un vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ perpendicolare al piano



$$\Rightarrow \boxed{r \perp \tilde{\pi} \Leftrightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}}$$

↳ condizione di proporzionalità tra i parametri direttori della retta r e le coordinate di un vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ perpendicolare al piano $\tilde{\pi}$.

ESEMPIO:

$\tilde{\pi}: x+y-2z=1$

Cerco la retta $\perp$ a $\tilde{\pi}$ e passante per $P=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

DATA la retta r, ricavare il piano $\tilde{\pi} \perp$ a r passante per $P=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

imporre che il prodotto scalare tra i parametri direttori della retta e un generico punto del piano $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sia $= 0 \Rightarrow x+y-2z=0$: giacitura di $\tilde{\pi}$

Imporre il passaggio per P: $x+y-2z=d \Rightarrow 2+2-4=d$

$\Rightarrow d=0 \Rightarrow \boxed{x+y-2z=0} : \tilde{\pi}$

- Perpendicolarità tra piani nello spazio

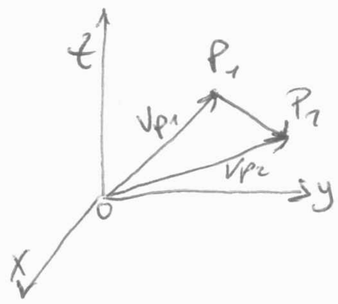
$\pi: ax + by + cz + d = 0$

$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\boxed{\text{quando } \pi \perp \pi_1 \text{ ? } \quad \text{se } aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0}$

- Distanza tra due punti nello spazio

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow d(P_1, P_2) = \| V_{P_2} - V_{P_1} \| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$



- Distanza tra un punto e una retta nello spazio (FARE PER ESERCIZIO)

Individuare il piano in cui giacciono ~~retta~~ il punto P e la distanza tra il punto P e la retta r, imporre la perpendicolarità tra la retta e il piano e trovare il punto di intersezione. Dopo calcolare distanza tra due punti.

- Distanza tra due rette nello spazio

trovare distanza fra due rette sghembe $\boxed{\text{esercizio}}$

Studiamo l'operatore isometrico definito su uno spazio ~~~~ euclideo V.

$\boxed{\text{Definizione}}$ L'operatore $T: V \longrightarrow V$ è detto isometrico se è biettivo e $\forall v, w \in V \quad T(v) \cdot w = v \cdot T^{-1}(w)$

$\boxed{\text{Proposizione}}$ Se T è isometrico $\Rightarrow$

1) $T(v) \cdot T(w) = v \cdot w \qquad \forall v, w \in V$
2) $\| T(v) \| = \| v \| \qquad \forall v \in V$
3) $d(T(v), T(w)) = d(v, w) \quad \forall v, w \in V$

$\boxed{\text{Dimostrazione}}$ 1) $T(v) \cdot T(w) \underset{\text{(PER DEFINIZIONE)}}{=} v \cdot T^{-1}(\overbrace{T(w)}^{w}) = v \cdot w$

2) $\| T(v) \|^2 = T(v) \cdot T(v) = v \cdot v = \| v \|^2 \Rightarrow \| T(v) \| = \| v \|$

3) $\| T(w) - T(v) \| \underset{\text{per linearità}}{=} \| T(w - v) \| = \| w - v \|$

Proposizione: 1) Se $U < V$ è invariante per T isometrico $\Rightarrow$
$\Rightarrow U^\perp$ è invariante per T
2) Se $U < V$ è invariante per T_* $\Rightarrow$ U è invariante per T^{-1}
da dim.
Dim.: 1) $\forall w \in U^\perp \Rightarrow T(w) \in U^\perp \Rightarrow$ considero $T(w) \cdot u$ con $u \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, u_1 \in V$ tale che $T(u_1) = u$ perché T biettivo e inoltre $u_1 \in U$
perché U è invariante per T^{-1} $\Rightarrow T(w) \cdot u = T(w) \cdot T(u_1) = w \cdot u_1 = 0$
2) da dimostrare per esercizio