26 novembre

In $\mathbb{R}^2$

Diamo l'equazione vettoriale di una retta r in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

l ed m si dicono **PARAMETRI DIRETTORI** di r

Dati due punti di $\mathbb{R}^2$: $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

cerco l'equazione della retta per P e Q.

I metodo diamo $ax + by + c = 0$ e imponiamo il passaggio per P e Q.

devo risolvere il sistema

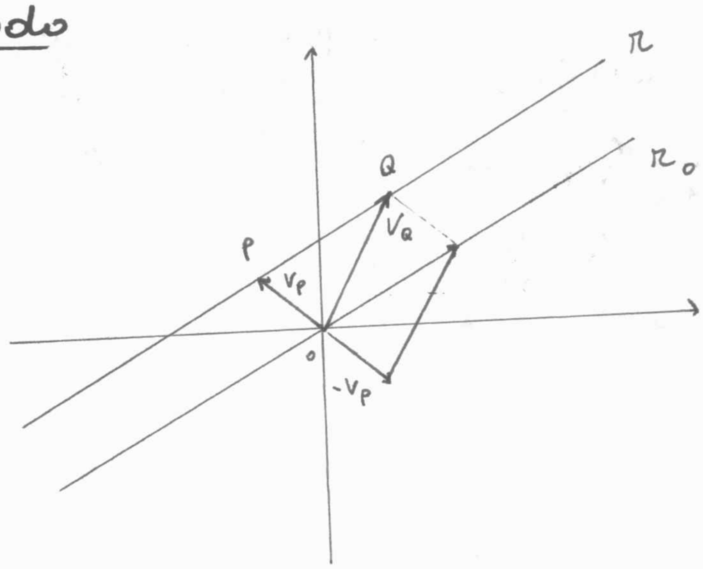
$$\begin{cases} a p_1 + b p_2 + c = 0 \\ a q_1 + b q_2 + c = 0 \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione diversa da quella nulla (che c'è sempre nel sistema omogeneo)

$$Rg \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{pmatrix} =$$

- 1 se una riga è uguale all'altra o un suo multiplo $\Rightarrow P \equiv Q \Rightarrow$ ci sono ∞ rette
- 2 ho una unica retta passante per i due punti ($P \neq Q$)

II Metodo



$$r_0 = \langle\langle V_Q - V_P \rangle\rangle = \langle\langle \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} \rangle\rangle$$

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

<u>ESEMPIO</u> Cerco la retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

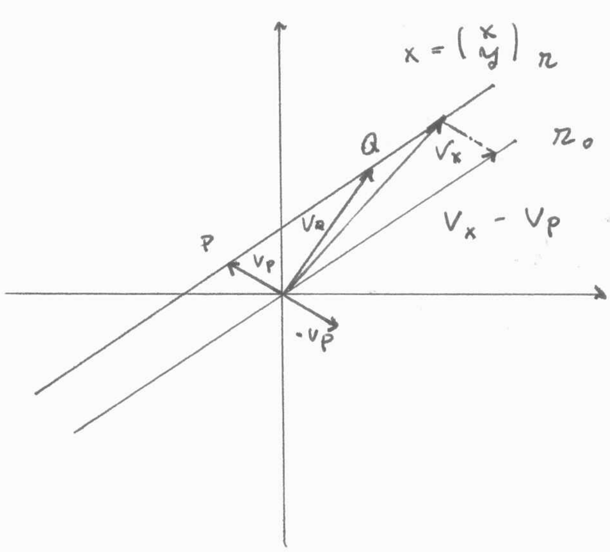
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -2(y-2) + 1 \\ s = y - 2 \end{cases}$$ in forma parametrica

$$\rightarrow x + 2y - 5 = 0$$ in forma cartesiana

$$\frac{y - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x - p_1}{q_1 - p_1} \leftarrow \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} x - p_1 & y - p_2 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{coordinate di } V_x - V_p \\ \text{coordinate di } V_Q - V_P \end{array} \end{array}$$

impongo che i vettori siano proporzionali e quindi che il determinante sia nullo



$$\underset{A}{\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R_1 - R_2 \to R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_2 \to R_3 \end{matrix} \underset{B}{\begin{pmatrix} x - p_1 & y - p_2 & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \\ q - p_1 & q_2 - p_2 & 0 \end{pmatrix}}$$

ho fatto solo operazioni determinantali quindi $\det A = \det B \Rightarrow$

$$\det B = - \begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0$$

<u>ESEMPIO</u> di prima

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$-x - 2y + 5 = 0$ come quella di prima

<u>**Definizione**</u> Si definisce **FASCIO DI RETTE** nel piano $\mathbb{R}^2$ la combinazione lineare di due rette date.

cioè $\alpha(\underset{r}{ax + by + c}) + \beta(\underset{r_1}{a_1 x + b_1 y + c_1}) = 0$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

se moltiplico e raccolgo x e y ottengo l'eq. generica di una retta del fascio

$$x(\alpha a + \beta a_1) + y(\alpha b + \beta b_1) + \alpha c + \beta c_1 = 0$$

in questo modo ottengo infinite rette

[se α fosse zero dividerei per β]

Supponendo $\alpha \neq 0$ divido per α e ottengo

$$ax + by + c + \frac{\beta}{\alpha}(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

pongo $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ e riscrivendo ottengo

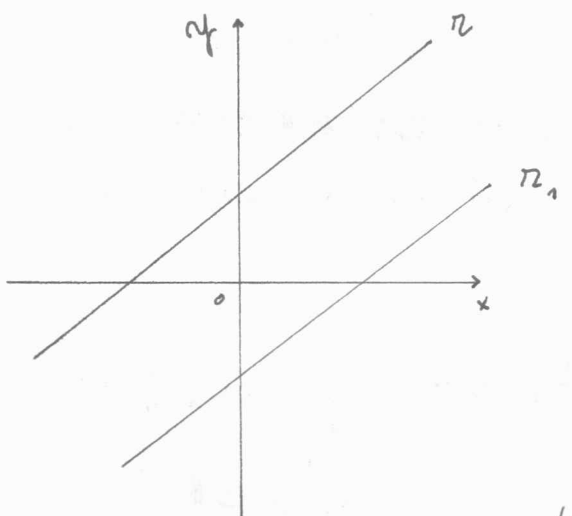
$$ax + by + c + \lambda(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

i due parametri non sono indipendenti
$\Rightarrow$ ho ∞^1 rette

Scrivendo in questo modo perdo l'equazione della retta $a_1 x + \beta_1 y + c_1 = 0$

Devo verificare che la retta che ho perso non soddisfi le condizioni

Supponiamo che $r \parallel r_1$



$\Rightarrow r : ax + by + c = 0$

$r_1 : ax + by + c_1 = 0$

$(\mathbf{c = c_1})$

- se le due rette coincidono, la combinazione lineare delle due rette e' sempre la stessa retta.

$$\alpha(ax + by + c) + \beta(ax + by + c) = 0$$

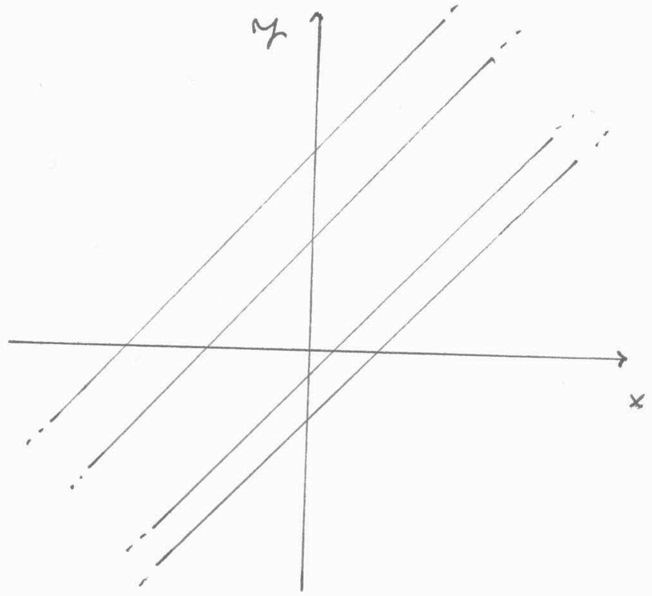
$$(\alpha + \beta)(ax + by + c) = 0$$

- se $\mathbf{c \neq c_1}$ $\quad \alpha(ax + by + c) + \beta(ax + by + c_1) = 0$

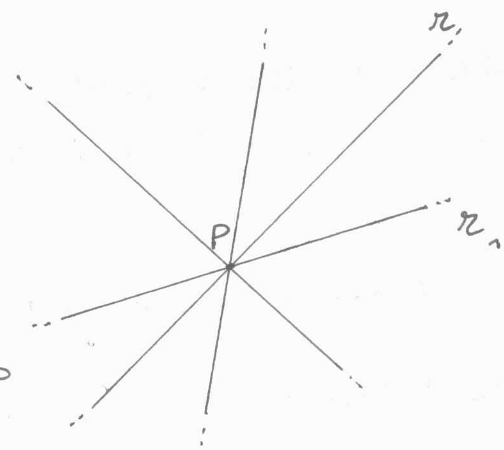
$$ax(\alpha + \beta) + by(\alpha + \beta) + \alpha c + \beta c_1 = 0$$

$$ax + by + \frac{\alpha c + \beta c_1}{\alpha + \beta} = 0$$

al variare di α e β ottengo tutte le rette $\parallel$ alle due date nell' ultimo caso otteniamo il **FASCIO IMPROPRIO** delle ∞ rette parallele alle rette date



Se $r_1 \cap r = \{P\}$



$\alpha(ax+by+c)+\beta(a_1x+b_1y+c_1)=0$

le coordinate di P soddisfano l'equazione

$\Rightarrow$ ogni retta del piano passa per P

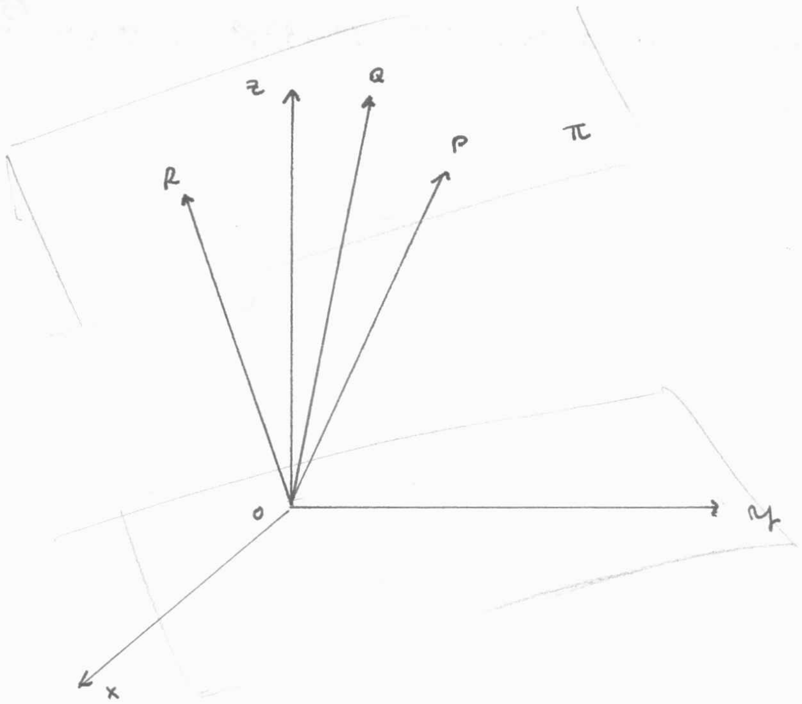
$\rightarrow$ abbiamo il **FASCIO PROPRIO** di <u>centro P</u>

Nello spazio ($\mathbb{R}^3$)

Dati in $\mathbb{R}^3$ due punti $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dfrac{x-p_1}{q_1-p_1} = \dfrac{y-p_2}{q_2-p_2} = \dfrac{z-p_3}{q_3-p_3}$ estensione nello spazio

L'eq. di un piano per 3 punti in $\mathbb{R}^3$, P, Q, R e' data ponendo det
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



<u>Definizione</u> **FASCIO DI PIANI** combinazione lineare di due piani dati π e π_1

se $\pi_1 : ax + by + cz + d = 0$

$\pi_2 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

l'eq. del fascio di piani e'

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) = 0$$

analogamente a prima perdo un piano del fascio se divido per α

- se $\pi_1 \parallel \pi_2$ con $\pi_1 \neq \pi_2$

  $\Rightarrow$ abbiamo il **FASCIO IMPROPRIO DI PIANI** (tutti paralleli cioe' aventi la stessa direzione dei due)

- se $\pi_1 \not\parallel \pi_2$ i due piani si intersecano in una retta

  $\pi_1 \cap \pi_2 = r$

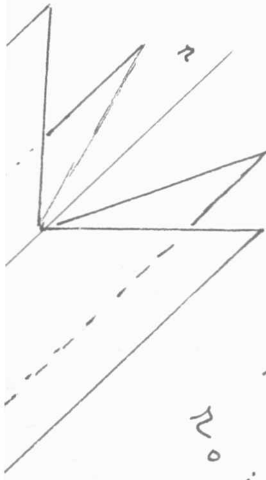
  $\Rightarrow$ il **FASCIO** e' **PROPRIO** e tutti i piani passano per r che e' detta <u>ASSE del fascio</u>

... di

... ho la ret...

il fascio ha equ...

$\alpha(x+y+z)+\beta($...



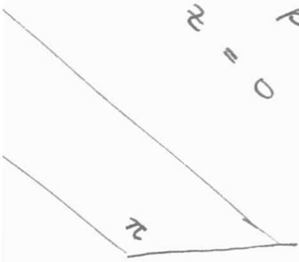
$\exists$ il p...

Considero ...
retta

$r_0 : \begin{cases} x + y + z \ldots \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$

sposto parallela retta
fino a farli passare per
la direzione del piano π

$x + y - z = 0$



$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 + 3 = 6$$

$\rightarrow$ sono lin indipendenti

$\downarrow$

non riesco a trovare un piano parallelo

Se partivo dalle eq. cartesiane

$$\alpha(x+y+z) + \beta(-x+2z-1) = 0$$

$$x + y + z + \lambda(-x+2z-1) = 0$$

$$x(1-\lambda) + y + z(1+2\lambda) - \lambda = 0$$

$$\begin{cases} 1-\lambda = -k \\ 1 = k \\ (1+2\lambda) = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = -1 \\ k = 1 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ k = 1 \\ 1+4 \neq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

$\nexists$ piano parallelo