25/03/2014

DATA $F: V\times V \to \mathbb{R}$ SIMMETRICA (NON NULLA) $\Rightarrow \exists\ \mathcal{B}_{\perp}$ DI V

SAPPIAMO CHE $\forall\ \mathcal{B}$ BASE DI V $\Rightarrow [F]_{\mathcal{B}}$ È DIAGONALE.
SIMMETRICA

$\Rightarrow$ ABBIAMO DIMOSTRATO CHE UNA MATRICE SIMMETRICA È CONGRUENTE AD UNA MATRICE DIAGONALE

OSSERVAZIONI

1) SE $F: V\times V \to \mathbb{R}$ È SIMMETRICA DEGENERE $\Rightarrow$ ESISTONO VETTORI ISOTROPI
(DA DIMOSTRARE PER ESERCIZIO)

2) SE $F: V\times V \to \mathbb{R}$ È SIMMETRICA NON DEGENERE $\Rightarrow$ POSSONO ESISTERE VETTORI ISOTROPI

ESEMPIO DI 2): $F: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TALE CHE

$$[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

CERCO LA SUA ESPRESSIONE ANALITICA:

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_2\ \ x_1+2x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1x_2 + y_2x_1 + 2x_2y_2$$

$$\left(\underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}; \underset{Y}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}\right) \longrightarrow \left(X^T [F]_{\mathcal{E}} Y\right) = x_1y_2 + y_1x_2 + 2x_2y_2$$

$$[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F(e_1;e_1) & F(e_1;e_2) \\ F(e_2;e_1) & F(e_2;e_2) \end{pmatrix}$$

$F(e_1;e_1) = 0 \Rightarrow$ e_1 È F-ISOTROPO.

POSSO CERCARE UN VETTORE F-ISOTROPO IN SENSO GENERALE

$\Rightarrow$ CERCO $F(v,v)=0$, $v\neq 0$

$$F(X;X) = x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$$

$$2x_2(x_1+x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

DUE RETTE IN $\mathbb{R}^2$ SONO SPAZI DI VETTORI ISOTROPI

STUDIAMO ANCORA F:
$\Rightarrow$ F È INDEFINITA
(VEDI PAGINA SEGUENTE)

$x_2>0$ $\quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad F(\tilde{X};\tilde{X}) > 0$

$x_1+x_2>0$ $\quad \hat{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad F(\hat{X};\hat{X}) < 0$

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ FORMA BILINEARE SIMMETRICA

Def

1) <u>DEFINITA POSITIVA</u> SE $F(v;v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
2) <u>DEFINITA NEGATIVA</u> SE $F(v;v) < 0 \quad \forall v \neq 0$
3) <u>POSITIVA</u> SE $F(v;v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
4) <u>NEGATIVA</u> SE $F(v;v) \leq 0 \quad \forall v \in V$
5) <u>INDEFINITA</u> (O INDETERMINATA) ALTRIMENTI (CIOÈ SE NON È (1),(2),(3),(4))

ESEMPIO

$$F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \to x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

PRODOTTO SCALARE STANDARD

$$[F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F(x;y) = F(y;x) \quad \forall x, y$$

$\mathcal{C}$ È F-ORTOGONALE E F-ORTONORMALE RISPETTO A PRODOTTO SCALARE

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3$$

PER LA COMMUTATIVITÀ DEL PRODOTTO TRA REALI (E COMPLESSI)

F È SIMMETRICA.

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 \Rightarrow F \text{ DEFINITA POSITIVA}$$

PERCHÉ $\forall (x_1; x_2; x_3) \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) > 0$

FORME ~~[illegible]~~ QUADRATICHE

Def: SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE, $\dim V = n$, DEFINITO SU UN CAMPO $\mathbb{K} \Rightarrow$ UNA FORMA $Q: V \to \mathbb{K}$ È DETTA <u>QUADRATICA</u> SE VERIFICA DUE CONDIZIONI:

1) $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v) \quad \forall v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}$ ~~[illegible]~~

2) DATI $v, w \in V \Rightarrow$ LA FORMA $F((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ (2
È BILINEARE SIMMETRICA $F: V \times V \to K$.

<u>ESEMPIO</u>

$Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x_1^2 + 2x_1x_2$

1) $Q\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} = (\alpha x_1)^2 + 2(\alpha x_1)(\alpha x_2) = \alpha^2(x_1)^2 + 2\alpha^2 x_1x_2 = \alpha^2 Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1+y_1)^2 + 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) - x_1^2 - 2x_1x_2 - y_1^2 - 2y_1y_2$

$= \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + 2x_1y_1 + \cancel{2x_1x_2} + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + \cancel{2y_1y_2} - \cancel{x_1^2} - \cancel{y_1^2} - \cancel{2x_1x_2} - \cancel{2y_1y_2}$

$= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2$

$[F]_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1) È BILINEARE PERCHÉ È DEFINITA TRAMITE UN POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO DUE TRAMITE UNA SOMMA DI PRODOTTI DELLE COMPONENTI DEI DUE VETTORI.

$F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2$

$= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2$

2) È SIMMETRICA

QUINDI Q È UNA FORMA QUADRATICA
PER AVERE UNA FORMA QUADRATICA DEVE ESSERE ANCHE UN POLINOMIO OMOGENEO DI SECONDO GRADO NELLE COORDINATE DELLO SPAZIO AMBIENTE.

DATA Q, FORMA QUADRATICA, $Q: V \to \mathbb{R}$.
CERCO UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA $F_Q: V \times V \to K$ TALE CHE $F_Q((v,v)) = Q(v)\ \forall v \in V$

HO GIÀ COSTRUITO $F((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$

$\Rightarrow F((v;v)) = Q(2v) - 2Q(v) = 4Q(v) - 2Q(v) = 2Q(v)$

SE HO SPAZI CON CARATTERISTICA $\neq 2$ POSSO DIVIDERE PER 2

$\Rightarrow$ PONGO $F_Q = \frac{F}{2} \Rightarrow F_Q((v,w)) = \frac{F((v,w))}{2} = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$

(*) SE POSSO DIVIDERE PER 2 (CARATTERISTICA $\neq 2$)
NEL CAMPO $\mathbb{K}$ ABBIAMO $F_Q((v;w))$ CHE È DETTA
FORMA POLARE DI $Q(w)$ ED È UNICA

Esercitazione per casa

DIMOSTRARE CHE F_Q È UNICA PER Q

DATA $F: V \times V \to \mathbb{R}$ FORMA BILINEARE SIMMETRICA $\Rightarrow$
SI PUÒ COSTRUIRE UNA FORMA $Q: V \to \mathbb{R}$
TALE CHE $Q(v) = F((v;v))$

Q È FORMA QUADRATICA?

$$Q(\lambda v) = F((\lambda v;\lambda v)) = \lambda F((v;\lambda v)) = \lambda^2 F((v;v)) = \lambda^2 Q(v)$$

CONSIDERO INOLTRE $\tilde{F}((v;w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w) = \cancel{F((v+w);F(v+w}$

$$\stackrel{!}{=} F((v+w);(v+w)) - F((v;v)) - F((w;w)) =$$

$$\stackrel{!}{=} F((v;v)) + F((w;v)) + F((v;w)) + \cancel{F((w;w))} - \cancel{F((v;v))} - \cancel{F((w;w))}$$

ESSENDO F FORMA SIMMETRICA $\Rightarrow$

CIOÈ

$$= 2F((v;w)) \qquad (F((v;w)) = F((w;v)))$$

$\tilde{F}$ È IL DOPPIO DI UNA FUNZIONE BILINEARE SIMMETRICA
QUINDI È UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA

$\Rightarrow$ SE CERCO $F_Q((v;w)) = \dfrac{\tilde{F}((v;w))}{2} = \dfrac{2F((v;w))}{2}$

RISULTATO: POSSO DETERMINARE IN $\mathbb{K}$ CAMPO CON CARATTERISTICA $\neq 2$
UN'APPLICAZIONE:

$$\phi \quad \text{FORME BILINEARI SIMMETRICHE}(V) \longrightarrow \text{FORME QUADRATICHE}(V)$$

$$F \longrightarrow Q \mid Q(v) = F((v;v))$$

$$F_Q \longleftarrow Q$$

DATA $Q: V \to K$, FORMA QUADRATICA $\Rightarrow$

FISSATA UNA BASE $\mathcal{B}$ DI V POSSO COSTRUIRE (3)

UNA MATRICE $\in M_{n \times n}(K)$, DOVE $n = \dim(V)$.

TALE MATRICE È $[F_Q]_{\mathcal{B}}$: È LA MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA POLARE DI Q, F_Q t.c. $Q(v) = F_Q(v, v)$

ESEMPIO

$$Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2$$

SIA $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$

$$F_Q = x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2$$

$$F_Q(v, w) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

$$[F_Q]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [Q]_{\mathcal{C}}$$

TRUCCO PER SCRIVERE VELOCEMENTE $[Q]_{\mathcal{C}}$

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \end{array}$$

COEFFICIENTE x_1^2

COEFFICIENTE $\frac{x_1x_2}{2}$

COEFFICIENTE x_2^2

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline x_1 & & & \\ \vdots & & & \\ x_n & & & \end{array}$$

LE ENTRATE SONO I COEFFICIENTI DEI PRODOTTI DELLE COORDINATE CORRISPONDENTI A RIGHE E COLONNE DIVISE PER IL NUMERO DI VOLTE CHE APPAIONO NELLA MATRICE