ESEMPIO

$|\lambda I - A|$ e $|A - \lambda I|$

DIFFERENZA TRA I DUE POLINOMI CARATTERISTICI

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det|\lambda I - A| =$

$= \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)-6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

$\det|A - \lambda I| = \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-6 = \lambda^2 - 5\lambda + -2$

Se $A \in M_{3\times3}$

$\det|\lambda I - A| =$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \det\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$

$= (\lambda-1)[(\lambda-1)\lambda-2] + 2(\lambda-1-2) - 3(-2+2\lambda) =$

$= \lambda^3 - \lambda^2 - \cancel{2\lambda} - \lambda^2 + \lambda + 2 + \cancel{2\lambda} - \cancel{6} + \cancel{6} - 6\lambda =$

$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 2.$

~~[illegible]~~ $\det|A - \lambda I| = \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2] - 2(\lambda-3) + 3(-2+2\lambda) =$

$= -\lambda + \lambda^2 - 2 + \lambda^2 - \lambda^3 + \cancel{2\lambda} - \cancel{2\lambda} + \cancel{6} - \cancel{6} + 6\lambda =$

$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 2.$

I POLINOMI SONO UNO L'OPPOSTO DELL'ALTRO

Dato che ci interessano le radici del polinomio caratteristico, dovremo porre il polinomio uguale a zero, in entrambi i casi potremo cambiare i segni. Dipende se si vuole cambiare il segno all'inizio usando $|\lambda I - A|$ oppure alla fine usando $|A - \lambda I|$.

Cambiamo il segno perché alla fine dovremo scomporre il polinomio e trovare le radici.

In conclusione se usiamo $|A - \lambda I| = (-1)^n \cdot \lambda^n + \ldots$
se usiamo $|\lambda I - A| = +1 \cdot \lambda^n + \ldots$

IN GENERALE:

$A \in M_{n \times n}$

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + C_2 \lambda^{n-2} + \ldots C_{n-1} \lambda + C_n$$

n = ordine della matrice A

I termini C_k, $\forall k = 1, \ldots, n$, sono dati dalla somma dei minori principali (QUELLI che coinvolgono la diagonale della matrice data) DI ORDINE k, MOLTIPLICATO PER $(-1)^{n-k}$

AD ESEMPIO:

$$C_1 = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$ $\Rightarrow$ Ritornando all'esempio precedente, della matrice $A \in M_{3\times3}$, AVREMO $C_1 = +2$

TRACCIA DELLA MATRICE

La traccia della matrice, indicata con $\mathrm{Tr}\,A$ è la somma degli elementi sulla diagonale.

$$\mathrm{Tr}\,A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \rightarrow C_1 = (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\,A$$

OSSERVAZIONE

La traccia di una matrice è un <u>INVARIANTE di similitudine</u>.

Ora vediamo C_n

$C_n = \det A$ Anche C_n è INVARIANTE di similitudine.

E i valori (COEFFICIENTI) in mezzo?

$C_K = (-1)^{n-K} \cdot \sum$ minori principali di ordine K.

SONO ANCH'ESSI INVARIANTI PER SIMILITUDINE

ESEMPIO

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo $C_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 5 = -5$

$|A| = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_3 = -2 \cdot (-1)^0 = -2$

$\Rightarrow C_2 = (-1)^{n-2}(-5) = +5$

$C_1 = (-1)^2 \cdot \mathrm{Tr}\, A = +1+1 = +2$

BISOGNA POI SCOMPORRE IL POLINOMIO

in $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$

OSSERVAZIONE

Dato un polinomio in una variabile x, di grado n, $P_n(x)$ => l'ordine di una radice α di $P_n(x)$ è il grado massimo con cui compare il binomio $(x-\alpha)$ nella scomposizione di $P_n(x)$ in fattori.

ESSO VIENE DETTO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DELLA RADICE α.

ESEMPI.

1) $x^2 - 2x - 1$ e

2) $x^2 - 2x + 1$.

Scomponiamo in fattori:

1) $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+1} \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

1) $= (x-(1+\sqrt{2}))\cdot(x-(1-\sqrt{2}))$

Nel primo caso ~~[illegible]~~ IL FATTORE $(x-(1+\sqrt{2}))$ ha ordine 1, perchè NELLA SCOMPOSIZIONE COMPARE al massimo un polinomio di ordine 1 E QUINDI $1+\sqrt{2}$ È RADICE DI 1) DI MOLTEPLICITÀ 1; ANALOGAMENTE PER $1-\sqrt{2}$.

2) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$ =>

2) $= (x-1)(x-1)$

Nel secondo caso invece è di grado 2, infatti scomposto il polinomio ho $(x-1)^2$ E QUINDI LA RADICE $x=1$ HA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA 2

STUDIO GEOMETRICO

$A \in M_{m \times m}$ => è associato in base B un operatore $T: R^n \longrightarrow R^n$

ALLA MATRICE

$(A - \lambda I) \in M_{m \times m}$ => è associato in base B l'operatore:

$(\lambda \in \mathbb{R})$

$$T - \lambda id : R^n \longrightarrow R^n$$

Considero $(T - \lambda id)(v)$. Il nucleo dell'operatore $(T - \lambda \cdot id)$ è definito dai vettori di R^n tali che $(T - \lambda id)(v) = 0$. Si può vedere come differenza delle immagini, ossia $T(v) - \lambda(v) = 0$ =>
$T(v) = \lambda \cdot (v)$

DEFINIZIONE : AUTOVETTORE

Chiamo AUTOVETTORE di un operatore T, quel vettore v ~~che~~ per il quale ~~esiste uno scalare λ~~,
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$; ponendo INOLTRE $v \neq 0$.
Nella stessa definizione non viene considerato $v = 0$ perché $T(v) = \lambda v$ vale per $\forall \lambda \in R$ se $v = 0$.

AUTOVALORE di T:

Lo scalare λ è detto AUTOVALORE di T o per T.

PROPOSIZIONE

1) Per ogni, $\forall$ autovettore $\exists!$ autovalore

2) Per $\forall$ autovalore $\exists$ infiniti autovettori

DIMOSTRAZIONE

1) Si v autovettore di $T \Rightarrow T(v) = \lambda_1 v \quad v \neq 0$

Per assurdo supponiamo che esista un $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \neq \lambda_2$ tale che $T(v) = \lambda_2 \cdot v \Rightarrow$

$T(v) = \lambda_1 v$ e $T(v) = \lambda_2 v \Rightarrow$

$$\lambda_1 v = \lambda_2 v$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) v = 0 \quad \text{poiché } v \neq 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

c.v.d.

2) Sia λ un autovalore di $T \Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n$ tale che $T(v) = \lambda v$. Considero kv, $k \in \mathbb{R}$

$$T(kv) \underset{\text{per linearità}}{=} k\,T(v) = k\lambda v = \lambda(kv)$$

Allo stesso autovalore ~~esistono~~ sono associati infiniti autovettori.

c.v.d.

NUCLEO e AUTOVETTORI

Gli autovettori di T sono quei vettori $v \in \mathbb{R}^n$ tali che: $v \neq 0$ e $v \in Ker(T - \lambda id)$ PER DETERMINARE TALI AUTOVETTORI Bisogna risolvere il SISTEMA OMOGENEO, ASSOCIATO ALLA matrice ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE $T - \lambda id$ IN UNA DATA BASE.

Infatti: tali autovettori sono le soluzioni del sistema OMOGENEO $(A - \lambda I)X = 0$ CON $X \in \mathbb{R}^n$: si avrà un sistema di n incognite in n equazioni.

Noi cerchiamo soluzioni non nulle, Quando un sistema ~~non~~ omogeneo ha soluzioni non nulle? Quando il rango non è massimo e cioè quando il det. della matrice associata è uguale a zero.

Il det. è $|A - \lambda I| = 0$

Pertanto le radici del polinomio caratteristico di A, $|A - \lambda I|$, sono gli autoVALORI dell'operatore T associato ad A nella base B.

Gli autovettori si trovano risolvendo il sistema $(A - \lambda I)X = 0$ dopo aver sostituito a λ gli autovalori trovati. [uno alla volta]

ESEMPIO

$$T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (x+y, 2x)$$

Determinare gli AUTOVETTORI.
Prima bisogna calcolare gli AUTOVALORI.
Determino la matrice associata A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(1-\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$P_A(\lambda) = +\lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Gli autovalori di T, sono 2 e -1. [INVARIANTI DELL'OPERATORE]
Determiniamo gli autovettori

$$\lambda = +2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{(A-\lambda I)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

retta : $\boxed{-x + y = 0}$ $\qquad$ $rg(A-\lambda I) = 1 \Rightarrow$ Sol Σ_0 = RETTA

Gli autovettori costituiscono una retta in $\mathbb{R}^2$ se l'autovalore è 2.

[Continua a pag. 9]

$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$

è Retta in $\mathbb{R}^2$

Se l'autovalore è uguale a -1
gli autovettori costituiscono una retta in $\mathbb{R}^2$: $2x+y=0$

AUTO SPAZIO

Definiamo AUTOSPAZIO l'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore uniti al vettore nullo $\Rightarrow$ l'AUTOSPAZIO è SOTTOSPAZIO VETTORIALE del DOMINIO.

DIMENSIONE DI AUTOSPAZIO

Se lo si studia col sistema allora dimensione sarà, numero di VARIABILI $-$ Rg A.

Dato che il rango non sarà mai massimo, allora la dimensione sarà sempre almeno 1.

L'autospazio si indica E_λ. Quindi si dimostrerà che $\dim E_\lambda \geq 1$. INOLTRE $\dim E_\lambda \leq$ ordine di λ come radice di $P_A(\lambda)$)