24 settembre 2014

In $\mathbb{R}^3$ considero alcuni enti geometrici: rette e piani.

Piano in $\mathbb{R}^3$

I piani sono in generale sottospazi affini dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.
Il piano π è spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo (genericamente) in 3 variabili (coordinate in $\mathbb{R}^3$) di rango 1 e quindi di un'unica equazione.

equazione cartesiana del piano π: $ax + by + cz = d$

Risolviamo il sistema: $ax = -by - cz + d$

le due variabili libere sono parametri (possono spaziare in tutto $\mathbb{R}$).

Prendo lo spazio vettoriale associato π_0

$$ax + by + cz = 0$$

$$ax = -by - cz \qquad \text{se } a \neq 0$$

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z$$

Ora trovo le soluz. fondamentali cioè le coordinate DEI VETTORI ~~fondamentali~~ della base.

x	y	z
$-b/a$	1	0
$-c/a$	0	1
$-\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t$	s	t

$\Rightarrow$ le soluz. fond. di Σ_0: $\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esse ci danno dei vettori di base di Σ_0.

$\Rightarrow \left(-\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t, \ s, \ t\right)$ è soluzione generica di Σ_0 e

quindi un generico vettore di π_0 (dove π_0 è direzione di π)

ESSENDO IL PIANO π UN SOTTOSPAZIO AFFINE DI $\mathbb{R}^3$ ESSO È IL TRASLATO DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE π_0 $\Rightarrow$

Ora determiniamo una soluzione particolare di Σ che individua il punto su π, ~~che da~~ il cui vettore corrispondente darà la traslazione:

tale soluzione può essere $\begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Eq. vettoriale di π: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} s - \frac{c}{a} t \\ s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{s \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vettore di base}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{punto "particolare" su } \pi}$$

eq. vettoriale scritto per esteso

$\Rightarrow$ Eq. parametrica

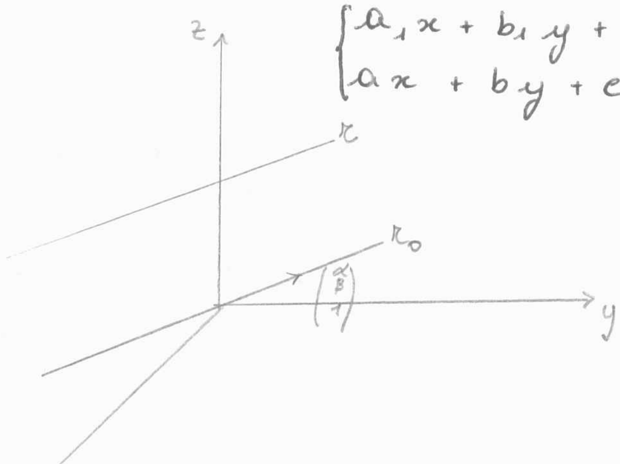
$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a} s - \frac{c}{a} t + \frac{d}{a} \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

<u>Retta in $\mathbb{R}^3$</u>

Sottospazio affine dello spazio $\mathbb{R}^3$

La retta r è spazio delle soluzioni di un sistema lin. <u>non</u> omogeneo (genericamente) in 3 variabili (coordinate di $\mathbb{R}^3$) di rango 2 ~~equazioni~~ di due equazioni

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a x + b y + c z = d \end{cases}$$



la direzioni è lo spazio delle soluz. del sistema OMOGENEO associato

r_0 (direzione di r) ha equazione cartesiana $\Sigma_0 \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a x + b y + c = 0 \end{cases}$

Cerco la soluzione generica di Σ_0:

trovo due soluz. fondamentali; scriviamo il sistema Σ_0 nella forma

$$\begin{cases} x = \alpha z \\ y = \beta z \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|c||c} x & y & z \\ \hline \alpha & \beta & 1 \\ \alpha \cdot s & \beta \cdot s & s \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è base di } r_0$$

e quindi $s\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore generico di r_0.

Cerco una soluzione particolare di Σ = porto $\Sigma = \begin{cases} x = \alpha z + \gamma \\ y = \beta z + \delta \end{cases}$

allora una soluz. particolare sarà $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix}$ coordinate di un preciso punto su r e quindi vettore della traslazione.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ eq. parametrica $\begin{cases} x = \alpha s + \gamma \\ y = \beta s + \delta \\ z = s \end{cases}$

Intersezione di rette

Diamo due rette r ed r_1 in $\mathbb{R}^3$ con eq. cartesiane: studiamo la loro posizione reciproca:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ ex + fy + gz = h \\ l_1 x + f_1 y + g_1 z = h_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow r \\ \\ \leftarrow r_1 \end{array}$$

analizziamo i ranghi $rg(A)$ e $rg(A \vdots B)$

$$\text{rg}\,A = \begin{cases} 2 \Rightarrow \text{rg}\,(A \mid B) = \begin{cases} 2 & \text{rette coincidenti PARALLELE} \\ 3 & \text{rette parallele NON COINCIDENTI (non c'è soluz.)} \end{cases} \\ 3 \Rightarrow \text{rg}\,(A \mid B) = \begin{cases} 3 & \text{rette che si intersecano in un punto} \\ 4 & \text{rette sghembe (non c'è soluz.)} \end{cases} \end{cases}$$

sghembe $\downarrow$ non parallele che non si intersecano

Se le rette sono date in eq. vettoriale $\Rightarrow$

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad e \quad r_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$r \parallel r_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$$

ora analizzo i punti in più che mi vengono dati:

se $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in r_1 \Rightarrow r \equiv r_1$

altrimenti sono disgiunte

La direzione di r è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. E QUINDI $\begin{cases} x = s\alpha \\ y = s\beta \\ z = s\gamma \end{cases}$

Esempio: trovare $r_1 \parallel r$ passante per P

l'equazione di una retta passante per $P: \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ e parallela ad r sarà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

Analizzate l'intersezione di due rette r data con eq. cartesiana ed r_1 con eq. parametrica (o vettoriale).

(FARE PER CASA)

Piani in $\mathbb{R}^3$

ANALIZZIAMO LA LORO INTERSEZIONE SE SONO DATI CON eq. cartesiana:

$$\begin{cases} \pi & ax + by + cz = d \\ \pi_1 & a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \end{cases}$$

il sistema mi dà l'intersezione geometrica

analizzo $rg(A) = \begin{cases} 1 \Rightarrow rg(A|B) \begin{cases} 1 \Rightarrow \begin{cases}\pi \\ \pi_1\end{cases} \text{ soluz. di dim 2, piani coincidenti } // \\ 2 \text{ piani } // \text{ non coincidenti con direzione } ax + by + cz = 0 \end{cases} \\ 2 \Rightarrow rg(A|B) = 2 \end{cases}$

il sistema ha soluz. piani si intersecano nella retta di eq. cartesiana $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \end{cases}$

Se π è dato da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

e π_1 è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Per vedere se le due direzioni coincidono prima verifico che i piani siano // e poi sostituisco un punto nel secondo e vedo se soddisfa l'EQUAZIONE DI TALE PIANO

Retta e Piano in $\mathbb{R}^3$

LORO INTERSEZIONE SE DATI CON eq. cartesiana $\Rightarrow$

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \end{cases} \leftarrow r$$
$$dx + ey + fz = g \leftarrow \pi$$

$rg(A) = \begin{cases} 2 \text{ (minimo 2 perché ho una retta)} \Rightarrow rg(A|B) = \begin{cases} 2 & \text{retta contenuta nel piano} \Rightarrow \text{sono // e uno è contenuto nell'altro} \\ 3 & \text{direz. retta è contenuta in quella del piano, ma la retta non sta nel piano. Sono //.} \end{cases} \\ 3 \Rightarrow rg(A|B) = 3 \rightarrow \text{retta e piano si intersecano in un punto } r \cap \pi = \{P\} \end{cases}$

SE DATI IN EQUAZIONE PARAMETRICA E QUINDI VETTORIALE $\Rightarrow$

Se $\pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e $r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

- Analizzo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$rg(A)$ — 2 sono $\parallel$, PERCHÉ LA DIREZIONE DI r; $r_0 = \langle\langle \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \rangle\rangle$ È CONTENUTA NELLA DIREZIONE DI π $\pi_0 = \langle\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \rangle\rangle$.

$rg(A)$ — 3 non sono $\parallel$

Prendo poi un punto della retta: se esso $\in$ al piano, allora la retta sta nel piano, altrimenti no.

Se $rg(A) = 3$ allora sono lin. indipendenti; π ed r non sono pertanto $\parallel$; retta e piano si intersecano, in quale punto?

impongo un sistema: $s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

E RISOLVO IN s, t, σ.