SPAZI VETTORIALI (1)

ESEMPI

1) $V = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ VOLTE}} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n \}$ $K = \mathbb{R}$ CAMPO SU CUI SI COSTRUIRÀ LO SPAZIO VETTORIALE

La "somma" sarà l'operazione tra ENNUPLE $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ è UNA SOMMA TRA NUMERI NELLA STESSA POSIZIONE (CIOÈ FRA COMPONENTI DELLA ENNUPLA CHE OCCUPANO LA STESSA POSIZIONE)

La "moltiplicazione" per uno scalare sarà: $\alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow (\mathbb{R}^n; +, \cdot)$ è una struttura algebrica DEFINITA sull'insieme $\mathbb{R}$, ed è uno SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$, se sono verificate le proprietà enunciate precedentemente: CIOÈ

PRODOTTO PER UNO SCALARE

$(\mathbb{R}^n; +)$ deve essere un GRUPPO ABELIANO (ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA, ELEMENTO NEUTRO, OPPOSTO PER LA SOMMA)

PROPRIETÀ COMMUTATIVA: le componenti di medesima posizione delle ENNUPLE si devono sommare anche scambiati di posto fra loro

$$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n)$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, x_2 + y_2, \dots, y_n + x_n)$$

sono equivalenti perché $x_i + y_i = y_i + x_i \ \forall i = 1, \dots, n$ poiché in $\mathbb{R}$ la somma gode della proprietà commutativa e QUINDI LE COMPONENTI CHE OCCUPANO LA STESSA POSIZIONE NELLE DUE ENNUPLE COINCIDONO.

Proprietà ASSOCIATIVA: $\left((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\right)+(z_1,\dots,z_n)$

$$\| $$

$$(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)+(z_1,\dots,z_n)$$

$$\|$$

$$\left((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,\dots,(x_n+y_n)+z_n\right)=$$

$$=$$

$$(x_1,\dots,x_n)+\left((y_1,\dots,y_n)+(z_1,\dots,z_n)\right)=$$

$$=\left(x_1+(y_1+z_1),\dots,x_n+(y_n+z_n)\right)$$ DUNQUE VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA PER L'ADDIZIONE FRA ENNUPLE poiché: $(x_i+y_i)+z_i=x_i+(y_i+z_i)$ per l'ASSOCIATIVITÀ in $\mathbb{R}$. $\forall i=1,\dots,n$

Esiste l'elemento neutro, $e=(0,\dots,0)$ poiché

$$(x_1,\dots,x_n)+(0,\dots,0)=(x_1+0,\dots,x_n+0)=(x_1,\dots,x_n)$$

poiché 0 è l'ELEMENTO NEUTRO NELLA SOMMA IN $\mathbb{R}$.

$\exists$ l'opposto $\forall X=(x_1,\dots,x_n)$: $-X=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$

Per la "<u>moltiplicazione per uno scalare</u>": deve essere associativa

$$\alpha\left(\beta(x_1,\dots,x_n)\right)=(\alpha\beta)(x_1,\dots,x_n)=\alpha(\beta x_1,\beta x_2,\dots,\beta x_n)$$

$$=\left(\alpha(\beta x_1),\alpha(\beta x_2),\dots,\alpha(\beta x_n)\right)=\left((\alpha\beta)x_1,\dots,(\alpha\beta)x_n\right)$$

POICHÉ VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA TRA NUMERI REALI

$\exists$ elemento neutro nel $\cdot$, che è $\alpha = 1$

Distributività: $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha\left((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\right) = (\alpha x_1, \dots \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) =$$

$$= \left(\alpha(x_1+y_1), \dots, \alpha(x_n+y_n)\right) + (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n)$$

Ogni componente delle ENNUPLE CONSIDERATE è uguale a quella di POSIZIONE CORRISPONDENTE, poiché la DISTRIBUTIVITÀ è una PROPRIETÀ (DELLE OPERAZIONI) DELL'INSIEME $\mathbb{R}$, di cui, le componenti delle ENNUPLE SONO ELEMENTI.

Ogni ELEMENTO HA UN RECIPROCO AD ESCLUSIONE DELL'ELEMENTO NEUTRO PER LA SOMMA.

LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA METTE IN RELAZIONE LE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO, ~~[illegible]~~

$(\mathbb{R}^n; +, \cdot)$ È LA STRUTTURA ALGEBRICA DEFINITA sull'insieme $\mathbb{R}^n$ DALLE OPERAZIONI di SOMMA e MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE, tale STRUTTURA È QUELLA DI SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{R}$.

Vediamo le matrici $p \times n$

1) $V = \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$ $\quad K = \mathbb{R}$ $\quad$ La somma:

DEFINIAMO LA SOMMA "$\hat{+}$":

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}} \quad e \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \hat{+} B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots p \\ j=1,\ldots n}}$$

2) La moltiplicazione per $\alpha \in \mathbb{R}$: $\hat{\cdot}$: se $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha \hat{\cdot} A = \left(\alpha a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}}$$

L'insieme di: $\left(M(\mathbb{R}), \hat{+}, \hat{\cdot}\right)$ è UNO SPAZIO VETTORIALE:

VERIFICARE:
PROPRIETÀ COMMUTATIVA, ASSOCIATIVA, ELEMENTO NEUTRO per la SOMMA; PROPRIETÀ COMMUTATIVA, ASSOCIATIVA, ELEMENTO NEUTRO, ~~[illegible]~~ E DISTRIBUTIVA per il PRODOTTO PER UNO SCALARE.

3) $V = \left\{ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \right\} = \mathcal{C}^0_{[a,b]}$, $K = \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~

insieme delle FUNZIONI CONTINUE nell'INTERVALLO $[a,b]$ (~~[illegible]~~ In $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$ l'APICE 0 SI RIFERISCE ~~[illegible]~~ alla ~~[illegible]~~ CARATTERISTICA DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI)

SOMMA: fare $f, g \in \mathcal{C}^0_{[a,b]} \Rightarrow (f+g)(x) =$

$$= f(x) + g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

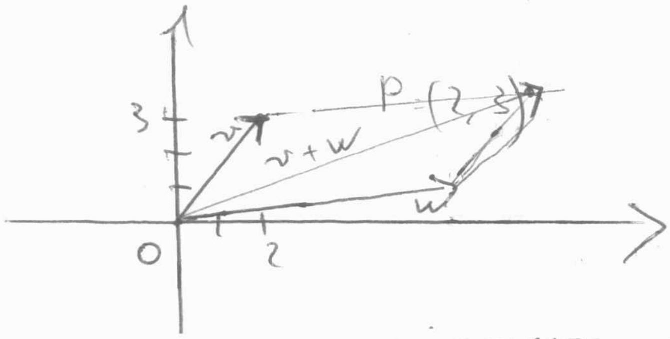
MOLTIPLICAZIONE PER α: Preso $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $f \in \mathcal{C}^0_{[a,b]} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \quad \forall x \in [a,b]$$

Continuano a valere le PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI che determinano LA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE: $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$ è uno SPAZIO VETTORIALE

Se siamo in uno SPAZIO VETTORIALE, è come se fossimo in $\mathbb{R}^n$, questo anche dimostrato rigorosamente.

$\mathbb{R}^2$ SPAZIO VETTORIALE: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$



IL PUNTO $P=(2,3)$ PUÒ ESSERE IDENTIFICATO CON un SEGMENTO $\overline{OP}$ ORIENTATO da O a P, di ~~lunghezza~~ MODULO PARI ALLA SUA LUNGHEZZA, E DI DIREZIONE CORRISPONDENTE ALLA RETTA SU CUI GIACE, E VERSO DA O A P. TALE SEGMENTO ORIENTATO È DETTO <u>VETTORE</u> <u>GEOMETRICO</u> v

il MODULO $|P|$ è la lunghezza del SEGMENTO $\overline{OP}$, ma APPROFONDIREMO IL CONCETTO DI LUNGHEZZA, QUANDO INTRODURREMO IL CONCETTO DI SPAZIO EUCLIDEO.

I VETTORI GEOMETRICI SONO SOMMABILI: $v+w$ SI POSSONO SOMMARE GEOMETRICAMENTE CON LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA anche in questo SPAZIO VETTORIALE, come anche la MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE: DATO v VETTORE ED $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v$ È UN VETTORE CHE GIACE SULLA STESSA RETTA DI v, HA MODULO PARI AD α VOLTE IL MODULO DI v E VERSO CHE DIPENDE DAL SEGNO DI α

Ciò è VERO IN $\mathbb{R}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$; mentre fisicamente visualizzabile solo fino ad $\mathbb{R}^3$, TEORICAMENTE E GEOMETRICAMENTE è vero fino ad $\mathbb{R}^n$ $\forall n$.