1

Sia $\Sigma: AX = B$ un sistema lineare non omogeneo di p-equazioni in n incognite $\Rightarrow A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}_{p \times 1}$

Cerco lo spazio $Sol\,\Sigma$ e analizzo le sue equazioni

Considero un esempio

$$\Sigma: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Sigma \text{ ha soluzione?}$$

$\circledast$ equazione cartesiana della retta che cerco.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

Aggiungendo una colonna il rg non aumenta, quindi sappiamo senza fare i conti che $rg(A) = rg(A \mid B) \Rightarrow \Sigma$ ha soluzioni!

Lo spazio ambiente in cui cercare lo spazio delle soluzioni è $\mathbb{R}^3$ ed in $\mathbb{R}^3$ abbiamo $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioè una $\overset{r}{\text{retta}}$ di soluzioni in $\mathbb{R}^3$.

L'equazione cartesiana della retta è $\circledast$.

$$\begin{cases} -3x_2 = 1 - 2x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3} \\ x_3 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}s - \frac{1}{3} \\ x_3 = -s \\ x_1 = s \end{cases}$$

x_1: parametro — variabile libera mentre x_2 e x_3 sono le variabili legate

equazione parametrica di $Sol\,\Sigma$

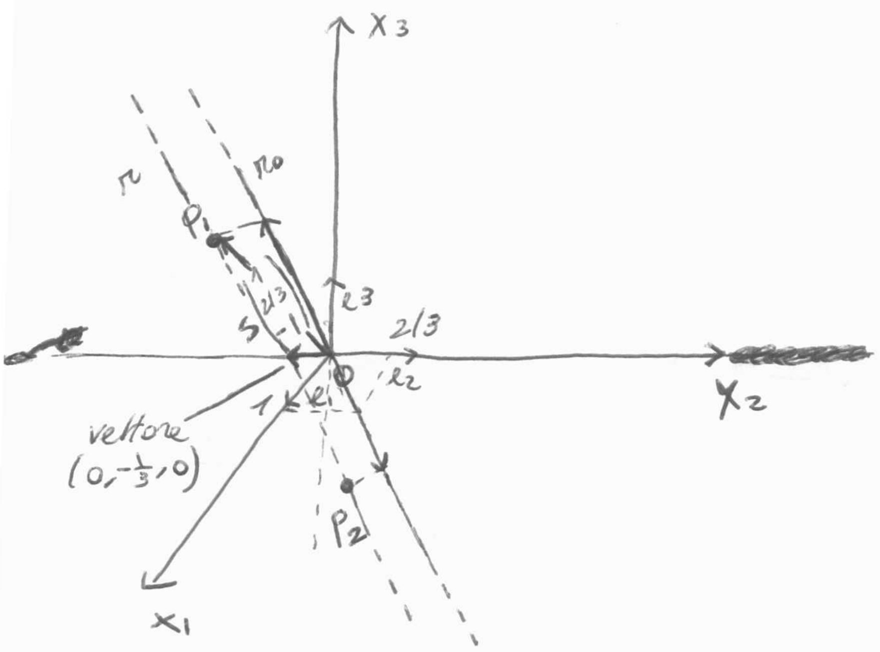
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

equazione vettoriale di $Sol\,\Sigma$

Scrivo il sistema lineare omogeneo associato a Σ, lo chiamiamo Σ_0: $AX = 0$

stessa matrice di Σ

$$\Rightarrow \Sigma_0 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$ anche $Sol\,\Sigma_0$ è una retta!



Un punto generico sulla retta r è dato come secondo estremo del vettore ottenuto sommando un vettore generico di r_0, cioè una soluzione generica di $Sol\,\Sigma_0$, con una soluzione particolare di Σ.

③ Un tale spazio è detto <u>SOTTOSPAZIO</u> <u>AFFINE</u> dello spazio vettoriale dato.

Innanzitutto definiamo l'applicazione <u>TRASLAZIONE DI VETTORE a</u> nel seguente modo:

se V è lo spazio vettoriale ambiente $\Rightarrow$ tale traslazione, indicata con τ_a, è:

$$\tau_a : V \longrightarrow V \qquad \forall\, v \in V$$
$$v \longrightarrow a + v$$

τ_a è biettiva? cioè è iniettiva e surrettiva

Siano $v_1, v_2 \in V$

$$\tau_a(v_1) = v_1 + a$$
$$\tau_a(v_2) = v_2 + a$$

pongo $\tau_a(v_1) = \tau_a(v_2)$

$$v_1 + a = v_2 + a$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \text{Sì è iniettiva}$$

τ_a è surriettiva? – cioè preso un qualunque elemento w del codominio $\Rightarrow \exists$ almeno un elemento v del dominio / $w = \tau_a(v)$;

cioè $\left(Im\, a = V \right)$

impongo $w = \tau_a(v) \Rightarrow w = v + a \Rightarrow v = w - a$

$$\tau_a(v) = \tau_a(w - a) = w - a + a = w$$ $\Rightarrow$ <u>τ_a è biettiva!</u>

<u>DEFINIZIONE</u>: Un sottoinsieme A di V è detto <u>SOTTOSPAZIO AFFINE</u> di V se $\exists$ un ~~vettore~~ elemento $a \in A$ ed un sottospazio vettoriale $W < V$ / $A = \tau_a(W)$ cioè $A = W + a$

~~ie~~ A è il traslato di un sottospazio vettoriale di V.

<u>OSSERVAZIONI</u>:

1) Il sottospazio W di cui A è il traslato è unico.

(da dimostrare per esercizio.)

2) Sono invece infiniti i vettori che definiscono la traslazione, fissati A e W.
Infatti qualunque punto di A può essere preso come vettore traslazione. (da dimostrare. <u>hint</u>: siano $a, b \in A \Rightarrow$ facciamo vedere che $a+W = b+W$ ricordando che $a+W = A$ ...)

3) Estendiamo al sottospazio affine il concetto di <u>DIMENSIONE</u> dato per i sottospazi vettoriali. In questo modo ~~la dim~~
se $A = W + a \Rightarrow \underline{\dim A = \dim W}$.

4) Per ogni $V_0 \in V$ posso definire un sottospazio affine traslato del sottospazio vettoriale W. $A = W + V_0$

<u>DEFINIZIONE</u>:
1) Diciamo DIREZIONE o GIACITURA del sottospazio affine il sottospazio vettoriale di cui esso è traslato.

2) Due sottospazi affini sono detti PARALLELI se la direzione del sottospazio di dimensione inferiore è contenuta nella direzione dell'altro.

In particolare se le dimensioni sono uguali $\Rightarrow$ essi sono PARALLELI se hanno la stessa direzione.

Quesito: I sottospazi vettoriali sono anche sottospazi affini?

Si perché dato $W \leq V \Rightarrow \exists\, a \in W \,/\, W = W + a$?

Basta prendere $a = 0$!!

Equazione di una retta in $\mathbb{R}^2$

equazione cartesiana implicita: $ax + by = c$

equazione cartesiana esplicita: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ con $b \neq 0$.

: $y = mx + q$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{a}{b}s + \frac{c}{b} \end{cases}$$

equazione parametrica

poi posso avere:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}$$

equazione vettoriale

Due rette nel piano si possono intersecare:

- in un PUNTO
- in una RETTA (coincidono)

Oppure non si intersecano.

SIANO:

$r: ax + by = c$

$r_1: a_1x + b_1y = c_1$

studiamo il $\Sigma: \begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$

Per il teorema di Rouché-Capelli studiamo il $\underbrace{rg\begin{pmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}}_{rg(A)}$ e il $\underbrace{rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}}_{rg(A|B)}$

$$\begin{tikzcd} & & rg(A|B) = 2 \\ & 1 \arrow[ur] \arrow[r] & rg(A|B) = 1 \\ rg(A) \arrow[ur] \arrow[r] & 2 \Rightarrow rg(A|B) = 2 & \end{tikzcd}$$

Se $rg(A) = 2$ il Σ ha soluzione, $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzione

Cioè le 2 rette r ed r_1 si intersecano in un punto.

Se $rg(A) = rg(A|B)$ cioè $1 = 1 \Rightarrow \Sigma$ ha soluzione e le rette coincidono.

Se invece $rg(A) = 1 \neq rg(A|B) = 2 \Rightarrow \Sigma$ non ha soluzione

$\Rightarrow$ cioè le rette non si intersecano, sono $\parallel$