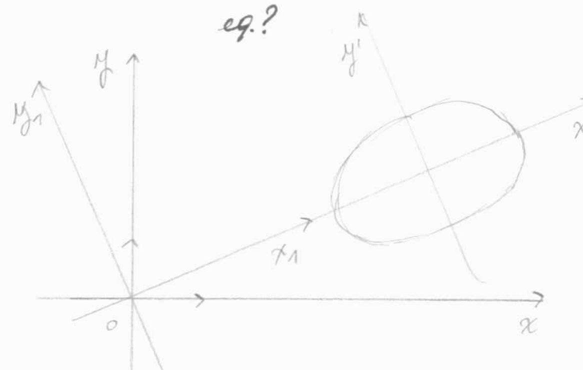
18 Maggio 2015

Classificazione delle quadratiche in $\mathbb{R}^n$

esempio: $x^2 + 2y^2 = 1$ $\qquad$ $y = x^2$

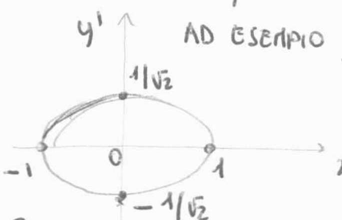
(*) $2x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y + 1 = 0$ $\qquad$ $3x^2 - y^2 = 1$

Ci chiediamo: Che cosa rappresenta il luogo dei pt del piano descritto da queste eq.?



VOGLIAMO Disegnare la curva, QUINDI classificarla, ma posso capire che curva è rappresentata dall'equazione senza disegnarla?

A PARTIRE DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y INIZIALE, CERCHIAMO un sistema di riferimento x', y', IN CUI una generica equazione che rappresenta una curva data, risulti "centrata" RISPETTO ad esso, permette di capire che tipo di curva essa è, COME AD ESEMPIO $\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{1/2} = 1$ CHE RICONOSCIAMO ESSERE UN'ELLISSE E SAPPIAMO DISEGNARE FACILMENTE.



Quindi posso ruotare il primo sistema di riferimento in modo che $x' \equiv X$ e poi traslarlo per far sì che l'origine coincida con il centro dell'ellisse $x'^2 + \frac{y'^2}{1/2} = 1$. Ora posso affermare che la curva in questione è un'ellisse.

NELL'EQUAZIONE DELLA QUADRICA SI RICONOSCE UNA PARTE CHE PUÒ ESSERE VISTA COME FORMA QUADRATICA: Riduciamo la parte quadratica a forma canonica, NELL'EQUAZIONE DELLA CONICA (*) AD ESEMPIO: $2x^2 + 3xy - y^2 \longrightarrow (x, y) A \binom{x}{y}$, MEDIANTE UNA TRASFORMAZIONE ISOMETRICA.

I) Passo dal sistema di coordinate x, y a quello in x_1, y_1 (trasformazione ISOMETRICA).

$$(x_1, y_1) D \binom{x_1}{y_1} \quad \rightarrow D = S^T A S \quad \rightarrow \binom{x}{y} = S \binom{x_1}{y_1}$$

Ora possiamo passare a x', y', in cui l'equazione sarà o solo con termini di grado 2° o con un solo termine di grado 1° e gli altri di grado 2°.

DEFINIZIONE:

Una **Quadrica** in $\mathbb{R}^n$ è il luogo dei punti di $\mathbb{R}^n$ rappresentato da un'equazione di II grado nelle n variabili date dalle coordinate dello spazio, cioè $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0$, con $a_{ij} \in \mathbb{R}^* \ \forall i,j$; $b_k \in \mathbb{R}$ $\forall k$; $c \in \mathbb{R}$.

esempio:
1) $ax^2 + bx + c = 0$
2) $a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0$ CONICA: curva in $\mathbb{R}^2$
3) $a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + c = 0$
(Superficie quadrica di $\mathbb{R}^3$)
4) ... trovo tutte le iper-quadriche.

Scriviamo matricialmente l'equazione.
Poniamo A, matrice associata alla parte quadratica e B il vettore dei coefficienti delle parti lineari $\Rightarrow$ se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ l'eq. si può scrivere come $X^T A X + B^T X + c = 0$

esempio: $2x_1^2 + 3x_1 x_2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 + 7 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (5, -6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 7 = 0$$

(Si procede analogamente per $\mathbb{R}^n$.)

riduciamo l'eq. a forma canonica E ANALIZZIAMO I VARI CASI OTTENUTI: Supponiamo di ridurre l'eq. nelle nuove coordinate $Y = (y_1, \dots, y_n)$ a
$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = c_1$ (λ_i = autovalori della matrice A)
n rango della matrice.

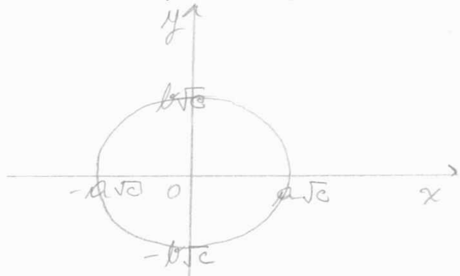
Se scompaiono i termini lineari, abbiamo QUADRICHE A CENTRO perchè $\exists$ almeno un pt $y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$ / se il pt di coordinate $(y_{01} + \alpha_1, \dots, y_{0n} + \alpha_n) \in \mathcal{Q}$ $\Rightarrow$ anche il pt di coordinate $(y_{01} - \alpha_1, y_{02} - \alpha_2, \dots, y_{0n} - \alpha_n) \in \mathcal{Q}$

1) Supponiamo il rango di A uguale a n $\Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = c$ (Quadrica non singolare)

Tipi diversi di quadrica a centro dipendono dalla segnatura della forma quadratica.
Supponiamo $c \neq 0$:

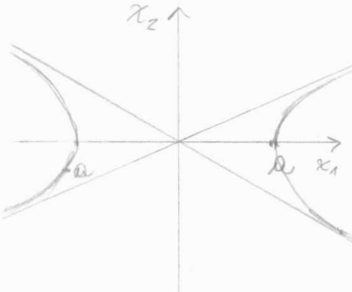
$\rightarrow n = 2$, $a_1^2 x_1^2 + b_1^2 x_2^2 = c$ $\rightarrow$ se $c > 0 \Rightarrow$ Ellisse; $\rightarrow$ se $c < 0 \Rightarrow$ non è Reale
$a_1^2 x_1^2 - b_1^2 x_2^2 = c \rightarrow \forall c \neq 0 \Rightarrow$ Iperbole.

Se DIVIDESSI $a_1^2 x_1^2 + b_1^2 x_2^2 = c$ PER $c \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ Ellisse con centro nell'origine e con a e b suoi semiassi.



$a_1^2 x_1^2 - b_1^2 x_2^2 = c \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \; c>0$

(Iperbole)



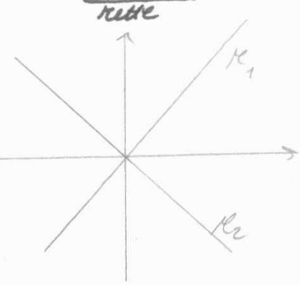
[N.B.: La segnatura della forma quadratica NON si cambia: È INVARIANTE DELLA FORMA QUADRATICA E QUINDI CARATTERIZZA E CLASSIFICA LA QUADRICA.]

se $c \neq 0$ $\rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$ (ho un unico pt reale $O=(0,0)$)

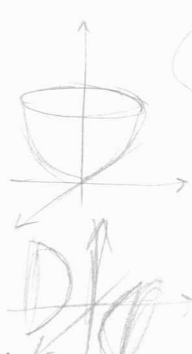
$\rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0 \rightarrow \underbrace{\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right)}_{\text{rette}} = 0$

$\mathcal{Q} = r_1 \cup r_2$

(La curva non è più connessa, ma si spezza in due componenti)



In $\mathbb{R}^3$, $c>0$, dopo aver diviso per c:



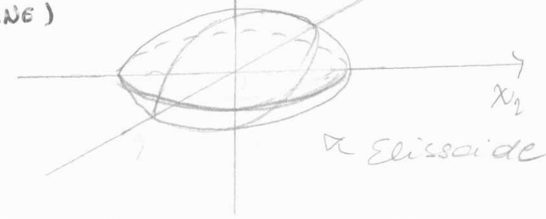
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$) Ellissoide

$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$) Iperboloide ad una falda

$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$) Iperboloide a due falde.

[Ciò che le classifica è: $\boxed{\text{quanti}}$ coefficienti DEI TERMINI DI 2° GRADO sono negativi e QUANTI POSITIVI NELL'EQUAZIONE RIDOTTA A FORMA CANONICA.]

PER DISEGNARE LA SUP. QUADRICA DETERMINIAMO LE CURVE DI INTERSEZIONE CON PIANI PARTICOLARI (LE SEZIONI PIANE)



$$\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 & \text{(Ellisse)} \\ x_2 = 0 \Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 & \text{(Ellisse)} \\ x_3 = k \Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = \underbrace{-\frac{k^2}{a_3^2} + 1}_{\frac{a_3^2 - k^2}{a_3^2}} \end{cases}$$

se $a_3^2 - k^2 \geq 0 \rightarrow$ ho una intersezione Reale!
$k^2 \leq a_3^2$

NB: la Sup. Sferica è un caso Particolare di ELLISSOIDE