In uno spazio euclideo possiamo determinare una base ortogonale cioè formata da vettori a due a due ortogonali.

Un vettore normalizzato è un vettore con norma unitaria. Dato $v \in \mathbb{R}^n$ => possiamo determinare il suo normalizzato:

sarà $u = \dfrac{v}{\|v\|}$

esempio $v \in \mathbb{R}^3$ euclideo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\Rightarrow \|u\| = 1$$

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ euclideo è costituita da vettori ortogonali a due a due e normalizzati.

Qual'è la matrice associata al prodotto scalare in una base ortonormale?

$$\text{Se } B_{\perp n} = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow [\text{"} \cdot \text{"}]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_n \\ \vdots & & & \vdots \\ v_n v_1 & & \dots & v_n \cdot v_n \end{pmatrix} =$$

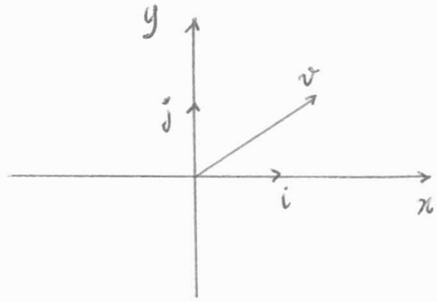
$$\begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & v_1 \cdot v_2 & \dots & \\ v_2 \cdot v_1 & \|v_2\|^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \|v_n\|^2 \end{pmatrix} = I$$

Se F è un prodotto scalare su V, n dimensionale, => dati v e $w \in V$ => $F((v, w)) =$

(data in V una base ortonormale) => $F((v, w)) = [v]^T_{B_{\perp n}} \cdot [F]_{B_{\perp n}} \cdot [w]_{B_{\perp n}} =$

$$= [v]^T_{B_{\perp n}} \cdot [w]_{B_{\perp n}} = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} =$$

$$= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$



$\mathbb{R}^2$

i, j i versori sono elementi di una base ortonormale

PRESO $v = xi + yj$

$\Rightarrow$ $v \cdot i = (xi + yj) \cdot i = x\, i \cdot i + y\, j \cdot i = x$

$v \cdot j = (xi + yj) \cdot j = x\, i \cdot j + y\, j \cdot j = y$

la componente di un vettore coincide con la coordinata del vettore, ED È DEFINITA DAL PRODOTTO SCALARE DEL VETTORE PER IL VERSORE DELLA BASE DATA; coincidenza tra componente e prodotto scalare.

Se in $(V) \simeq \mathbb{R}^n$ è dato un prodotto scalare non esistono vettori isotropi $(\neq 0)$ $\Rightarrow$ dato $\mathcal{U} < \mathbb{R}^n$ posso sempre determinare $\mathcal{U}^\perp < \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}^\perp$ è unico e $\boxed{\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = \mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow$ ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si può scomporre nella somma di due vettori u e w, con $u \in \mathcal{U}$ e $w \in \mathcal{U}^\perp$

$\Rightarrow$ $v = u + w$: u è detto PROIEZIONE ORTOGONALE di v su $\mathcal{U}$

w è la PROIEZIONE ORTOGONALE di v su $\mathcal{U}^\perp$

Come Operiamo ?

Diamo una base qualunque in $\mathbb{R}^n$ euclideo : $\mathcal{U} = \langle\langle u_1, \dots, u_k \rangle\rangle$ e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\Rightarrow$ so che $v = u + w$ con $u \in \mathcal{U}$ e $w \in \mathcal{U}^\perp$ e cerco $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k$

cioè cerco le coordinate $(x_1, \dots, x_k)$ di u.

$w = v - u = v - (x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k)$

So che $w \cdot u_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v - x_1 u_1 - x_2 u_2 - \dots - x_k u_k) \cdot u_1 = 0 \\ \vdots \\ (v - x\, u - x\, u - \dots - x_k u_k) \cdot u_k = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1\, u_1 \cdot u_1 + x_2\, u_2 \cdot u_1 + \cdots + x_k\, u_k \cdot u_1 = v \cdot u_1 \\ x_1\, u_1 \cdot u_2 + x_2\, u_2 \cdot u_2 + \cdots + x_k\, u_k \cdot u_2 = v \cdot u_2 \\ \vdots \\ x_1\, u_1 \cdot u_k + x_2\, u_2 \cdot u_k + \cdots + x_k\, u_k \cdot u_k = v \cdot u_k \end{cases}$$

Il sistema ha soluzione?

Rouche - Capelli: il sist. ha soluz. se i due ranghi coincidono

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \cdots & u_1 \cdot u_k \\ \vdots & & \vdots \\ u_k \cdot u_1 & \cdots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}}_{= [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{B_u}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot u_1 \\ v \cdot u_2 \\ \vdots \\ v \cdot u_k \end{pmatrix}$$

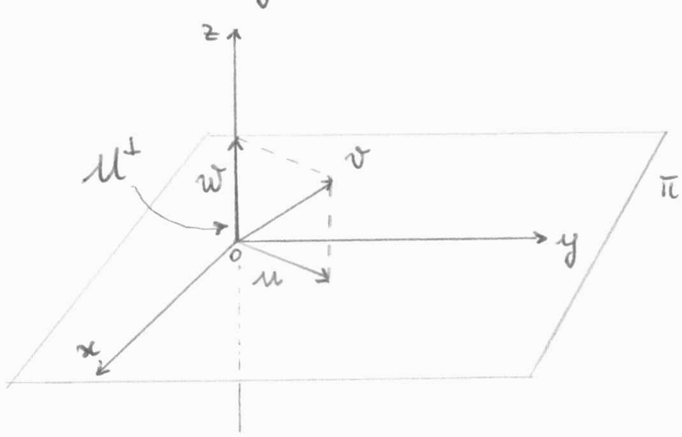
matrice associata alla forma bilineare ristretta al sottospazio

poiché la forma bilineare è definita positiva, allora tutti i minori di Nord - Ovest sono > 0. E QUINDI ANCHE IL DETERMINANTE $\Rightarrow$ IL RANGO È k.

Il sistema ha soluzione perché il rango della matrice $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{B_u} = k$ massimo.

Adesso si risolve il sistema e si trova la proiezione.

Esempio In $\mathbb{R}^3$ sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ voglio la sua proiezione ortogonale su $\pi : x + y + z = 0$



$\pi = U$ $(z = 0)$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Prendo una base di π : $B_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow v = x_1 u_1 + x_2 u_2$

$$\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} x_1\, u_1 \cdot u_1 + x_2\, u_2 \cdot u_1 = v \cdot u_1 \\ x_1\, u_1 \cdot u_2 + x_2\, u_2 \cdot u_2 = v \cdot u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 1 = -2 \\ x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2-4x_2 + x_2 = -2 \\ x_1 = -1-2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow v = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se Considero una base $B_\perp$ di U, $B_\perp = \{e_1, \dots, e_K\} \Rightarrow$ il sistema diventa :

$$\begin{cases} x_1\, e_1 \cdot e_1 + x_2\, e_2 \cdot e_1 + \dots + x_K\, e_K \cdot e_1 = v \cdot e_1 \\ \vdots \\ x_1\, e_1 \cdot e_K + x_2\, e_2 \cdot e_K + \dots + x_K\, e_K \cdot e_K = v \cdot e_K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1\, \|e_1\|^2 = v \cdot e_1 \\ x_2\, \|e_2\|^2 = v \cdot e_2 \\ \vdots \\ x_K\, \|e_K\|^2 = v \cdot e_K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{v \cdot e_1}{\|e_1\|^2} \qquad x_2 = \frac{v \cdot e_2}{\|e_2\|^2} \qquad \dots \qquad x_K = \frac{v \cdot e_K}{\|e_K\|^2}$$

coordinate della proiezione del vettore
(quando ho una <u>base ortogonale</u>!)

(Coefficienti di Fourier)

Cerchiamo una base ortogonale di un sottospazio: prendiamo una base qualunque del sottospazio $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$ con

$$\mathcal{U} = \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,1} x_1 + a_{n-k,2} x_2 + a_{n-k,n} x_n = 0 \end{cases}$$

Considero la nuova base $\{w_1, \dots, w_k\} \Rightarrow w_1 = u_1$ poi cerco un vettore di $\mathcal{U}$, h con $h \cdot u_1 = 0$ e così via.

$\downarrow$

trovo sottospazio ortogonale

Tornando all'esempio precedente:

$$\mathcal{U} = x + y + z = 0 \qquad B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad w_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1^{\perp} = \{ h \mid h \cdot u_1 = 0 \} = \left\{ h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

$\downarrow$

retta di $\mathbb{R}^3$ che sta dentro ad $\mathcal{U}$

$$\Rightarrow h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

secondo vettore di base che mi serve per formare la base ortogonale

$$\Rightarrow B_{\perp \mathcal{U}} = \left\{ \underset{u_1}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}}, \underset{h}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \right\}$$

$\Rightarrow$ la base ortonormale che ne deriva è

$\downarrow$

$\|u_1\| = \sqrt{2}$

$\|h\| = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow B_{\perp_m} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

Se voglio completare $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ impongo $\begin{cases}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 0\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x - z = 0\\ x - 2y + z = 0\end{cases} \quad \begin{cases}z = x\\ x = y\end{cases}$

$\Rightarrow$ prendo $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

La Base di $\mathbb{R}^3$ può essere data così: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$