13 maggio 2015

Teorema di struttura per operatori simmetrici

Dato $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrico $\Rightarrow \exists\, B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^n$ tale $[T]_{B_{\perp n}} = D$

STUDIAMO GLI OPERATORI SIMMETRICI DA UN PUNTO DI VISTA GEOMETRICO:

- Per $n = 1$ $\quad T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

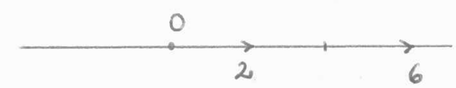
$$x \longmapsto \lambda x$$

funzioni lineari su $\mathbb{R}$ sono di questo tipo.

TALE TRASFORMAZIONE GEOMETRICA È DETTA <u>Omotetia</u> di rapporto $\lambda \in \mathbb{R}$

se $\lambda > 1$ $\quad$ esempio $\lambda = 3 \Rightarrow T(x) = 3x$

È DILATAZIONE



dilatazione dei vettori sulla retta reale.

se $0 < \lambda < 1$ È contrazione

esempio $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow T(x) = \frac{1}{2} x$

se $\lambda = 0$ manda tutto in zero, è l'applicazione nulla.

se $\lambda = -1$ $\quad T(x) = -x$ ribaltamento

se $\lambda < -1$ composizione di dilatazione e ribaltamento

Ogni altro operatore simmetrico su $\mathbb{R}$ si ottiene componendo quelli visti.

- Per $n = 2$ $\quad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ simmetrico

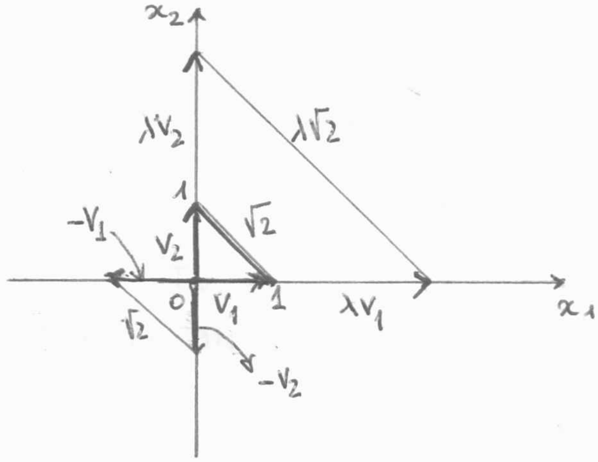
$\exists\, B_{\perp n}$ t.c. $[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow [v]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ritrovo in $\mathbb{R}^2$ le condizioni che avevo su $\mathbb{R}$;

<u>Omotetia</u>



$\lambda = 3$ dilatazione

$\lambda = -1$ simmetria rispetto a O

Tutti gli altri valori (DI λ DANNO OPERATORI CHE) sono composizione di queste trasformazione geometriche.

Anche in $\mathbb{R}^3$ troverò una $\lambda \cdot I$ ancora una volta ho un' OMOTETIA di rapporto λ.

Questo può essere esteso a qualunque dimensione n.

Applicazione: computer grafica.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ globalmente <u>non</u> ho più un' omotetia.

l' immagine non ha più lo stesso rapporto rispetto a tutte le dimensioni che vado a considerare.

VEDIAMO ALLORA COSA POSSIAMO AVERE IN $\mathbb{R}^2$!

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad [T]_{B+m} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

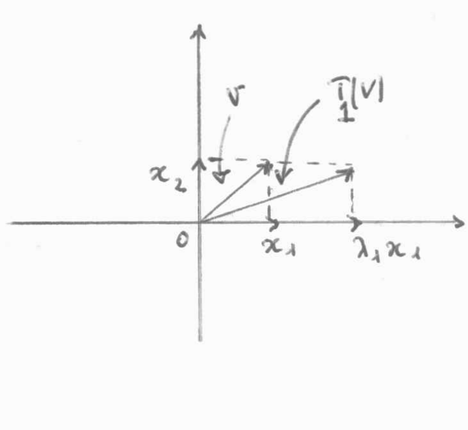
le matrici sono ASSOCIATE ancora AD operatori simmetrici in $\mathbb{R}^2$:

STUDIAMO L'OPERATORE T_1 ASSOCIATO AD UNA DELLE DUE MATRICI:

$$T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

op. simmetrico dilata, contrae o inverte la 1ª coordinata

→ omotetia sulla 1ª coordinata



La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ è invece un' OMOTETIA sulla 2ª coordinata

IL PRODOTTO DELLE DUE MATRICI, DÀ LA COMPOSIZIONE DEGLI OPERATORI ASSOCIATI

E Quando compongo ho la trasformazione simm. che sto studiando

$\Rightarrow$ IN GENERALE UN OPERATORE SIMMETRICO DI $\mathbb{R}^2$ È DATO DA Composizione di Omotetie relative ai singoli assi di riferimento.

ANALOGAMENTE

In $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{(verificare)}$$

omotetia su ogni retta del sistema di riferimento

Il tutto si può estendere allo stesso modo in $\mathbb{R}^n$ $\forall n$.

Proposizione : Una matrice A reale $A \in M_{n\times n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ è simmetrica

(cioè $\exists$ S ortogonale tale che $D = S^{-1}AS = S^TAS$)

Dim : se so che è simm. ho già dimostrato, nel teorema di struttura, che è ortogon. diagonaliz.

QUINDI

"$\Leftarrow$" è ~~stato~~ dimostrato per mezzo del Teorema di struttura per gli operatori simmetrici.

Infatti : A simmetrica è associata ad un operatore simmetrico che è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale.

"$\Rightarrow$" (necessità)

A è ortogonalmente diagonalizzabile, cioè $\exists$ D ed S ortogonale tali che $D = S^{-1}AS$

$\Rightarrow D = S^TAS \Rightarrow D^T = (S^TAS)^T \Rightarrow$

$\Rightarrow D = S^TA^TS$

Poiché $D = S^TAS = S^TA^TS \Rightarrow A = A^T$

c.v.d.

Abbiamo analizzato la matrice associata ad una rotazione e definito come la matrice associata ad una trasformazione lineare riassume tutte le proprietà dell'applicazione.
Si possono considerare rotazioni che lasciano invariata la figura: esse sono spesso chiamate "simmetrie per rotazione": in natura si trovano numerosi esempi di simmetrie di rotazione: i cristalli di neve hanno, in genere, una simmetria di rotazione di 60°, cioè la loro immagine rimane la stessa se viene ruotata di $\frac{\pi}{3}$; questa simmetria dipende dalla struttura del reticolo cristallino dell'acqua allo stato solido, che è esagonale. il fiocco di neve si forma su un cristallo originale per successive aggiunte di altre combinazioni con la stessa simmetria, ma di dimensione variabile.
Molti organismi viventi hanno simmetrie per rotazione. Ad esempio la medusa: ha il corpo attraversato da canali radiali in # di 4 o multipli di 4, con tentacoli posti ad intervalli regolari.... : quindi la sua figura rimane invariata in seguito a rotazioni di angoli pari a 2π diviso per 4, 8, 12, cioè $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.

Vediamo altre applicazioni:
La "computer graphica" è un insieme di tecniche che permettono di modificare le immagini digitali, geometricamente (il più delle volte) nel formato vettoriale (come pdf). Ad esempio l'operazione di "zoom" si ottiene con trasformazioni associate a matrici $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ che corrispondono ad un ingrandimento, se $\gamma > 1$, ad un rimpicciolimento, se $0 < \gamma < 1$, dell'immagine.
Le matrici di rotazione R_ϑ (in particolare quelle per $\vartheta = \pm \pi/2, \pm\pi$) sono molto utilizzate per "raddrizzare" immagini; così come $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ riflette specularmente l'immagine rispetto all'asse y.

In tutti questi casi il programma di visualizzazione dell'immagine applica la trasformazione geometrica ai dati vettoriali e solo successivamente riproduce il disegno su schermo. Nessun dettaglio viene cancellato e quindi l'immagine rimane di alta qualità. La scala e l'orientazione vengono scelti dai programmi di visualizzazione.

Nel formato raster queste operazioni sono meno naturali. Ad esempio nel ridurre le dimensioni di un'immagine a metà, ogni pixel ne sostituisce 4 e l'immagine è meno definita.

Supponiamo di voler ruotare l'immagine di $\frac{\pi}{4}$: dove vengono spostati i pixel di coordinate $(1500, 1500)$ e $(1501, 1501)$?

$$\left(rot\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)(1500, 1500) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} 1500 - \frac{\sqrt{2}}{2} 1500 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} 1500 + \frac{\sqrt{2}}{2} 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \cdot 1500 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1501 \\ 1501 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot 1501 - \sqrt{2} \cdot 1501 \\ \sqrt{2}\ 1501 + \sqrt{2} \cdot 1501 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3002 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Poiché i pixel sono coordinate dell'immagine, allora devono avere coordinate intere, quindi nessun pixel viene trasformato esattamente in un altro, ma ad un pixel corrispondono più trasformati possibili.

Questo è un problema, ma ogni soluzione cambia il contenuto dell'immagine in modo irreversibile.

Sia A simmetrica : $\exists\ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrico t.c. $[T]_{B+n} = A$

anche abbiamo che A è associata ad una forma quadratica $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

A è simile ad una matrice diagonale cioè $\exists\ D = S^{-1}AS$
S ortogonale SE PENSATA ASSOCIATA ALL'OPERATORE SIMMETRICO.

SE PENSATA ASSOCIATA AD UNA FORMA QUADRATICA ?
$\Rightarrow$ A è congruente ad una matrice diagonale cioè $\exists\ D$ ed $S \mid D = S^T A S$

L'OPERATORE E LA FORMA QUADRATICA SONO LEGATE IN QUESTO MODO:
Se T è operatore associato ad A $\Rightarrow$ la forma quadratica Q può essere così definita:

$$Q(v) = T(v) \cdot v$$

Infatti: $A = (a_{ij}) = [T]_{B+n}$, $[v]_{B+n} = X$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B+n} = AX$$

$$\Rightarrow Q(X) = (AX)^T \cdot I \cdot X = X^T A^T X = X^T A X$$

forma quadratica.

Sia $A = [T]_{B_1}$ e $D = [T]_{B_2}$ con B_1 e B_2 basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$:

D ha nella diagonale principale gli autovalori λ di T e la matrice S tale che $D = S^{-1}AS$ ha per colonne autovettori, relativi agli autovalori di T, nella base B_1. LA MATRICE S DÀ IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE: RICORDANDO CHE S È ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE

$$id: (\mathbb{R}^n, B_2) \to (\mathbb{R}^n, B_1)$$

$$Y \longmapsto X = SY$$

DOVE $\underset{[V]_{B_1}}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ E $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [V]_{B_2}$

ABBIAMO:

$$Q(X) = X^T A X \Rightarrow (SY)^T A (SY) = Y^T \underbrace{S^T A S}\, Y = Y^T S^{-1} A S\, Y = Y^T D\, Y = Q(Y)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$$ forma canonica di Q

INFATTI: $(y_1, y_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (y_1\lambda_1 , \lambda_2 y_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$

Esercizio $\quad q((x_1, x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ $\quad$ ridurre a forma canonica usando trasformazioni isometriche

Determino la matrice associata a q nella base canonica

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ cerco gli autovalori

N.B. devo usare trasf. isometriche! (altrimenti non vale il ragionamento)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (1-\lambda+1)(1-\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 2 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow q((y_1, y_2)) = 2y_2^2 =$$

$$= (y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Cerco la base B_2 ortogonale: cerco autovettori di T, ORTONORMALI

$$E_0 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$E_0 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

$$E_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0$$

$$E_2 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

$$\Rightarrow B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

il cambiamento di coordinate è $SY = X$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{cases}$

cambiamento di coordinate

$q((y_1, y_2)) =$ fare i conti $= 2y_2^2$