Due matrici A e B associate alla stessa forma quadratica in basi diverse sono <u>congruenti</u>; quindi anche la matrice diagonale D che dà la forma canonica, è congruente alla matrice di partenza A, cioè A e D sono legate da una matrice invertibile S in questo modo: $D = S^T \cdot A \cdot S$.

Possiamo considerare A, matrice simmetrica di partenza, come la matrice associata ad un operatore T nella base iniziale dello spazio ambiente $\Rightarrow$ cerchiamo una matrice diagonale D associata a T in un'altra base $\Rightarrow$ D e A sono <u>simili</u>, cioè legate dalla relazione $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

DEFINIZIONE

$\exists$ matrici quadrate S, dette $\boxed{\text{ortogonali}}$, tali che $S \cdot S^T = I$, cioè $S^T = S^{-1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ poiché, come vedremo, ogni matrice simmetrica reale è <u>ortogonalmente diagonalizzabile</u>, cioè diagonalizzabile tramite S ortogonale (TALE CHE $D = S^{-1}AS$), e quindi la matrice D così trovata può essere pensata come <u>congruente</u> ad A PERCHÉ ALLORA $D = S^TAS$.

PER TALE MOTIVO POSSIAMO CERCARE LA FORMA CANONICA DELLA FORMA QUADRATICA "DIAGONALIZZANDO" LA MATRICE MEDIANTE LA RICERCA DEGLI AUTOVALORI.

In uno spazio vettoriale reale n-dimensionale consideriamo una forma bilineare simmetrica definita positiva.

$\boxed{\text{Esempi}}$ 1) in $\mathbb{R}^2$ mettiamo la forma bilineare $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\overset{\|}{x}}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\overset{\|}{y}}\Big) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2$$

Per vedere se è simmetrica la F mi chiedo se $F(x,y) = F(y,x)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, oppure mi chiedo se è simmetrica la matrice

$$\begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix}$$

che in questo caso è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Per sapere se è definita positiva mi chiedo se $F(x,x) > 0$ $\forall x \neq 0$

$F(x,x) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ perché è una somma di quadrati, e siamo in $\mathbb{R}$

E QUINDI È POSITIVA PER $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

2) Sia $\mathbb{R}[x]_n = \{$polinomi nella variabile x a coeff. in $\mathbb{R}$ fino al grado n$\}$.

Considero la forma $F: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(p(x), q(x)) \longmapsto \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx$$

F è bilineare? $F(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, q(x)) = \alpha_1 \cdot F(p_1(x), q(x)) + \alpha_2 \cdot F(p_2(x), q(x))$

$$\| \qquad \int_{-1}^{1} (\alpha_1 \cdot p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)) \cdot q(x)\, dx = \alpha_1 \int_{-1}^{1} p_1(x) \cdot q(x)\, dx + \alpha_2 \int_{-1}^{1} p_2(x)\, q(x)\, dx$$ e

analogamente per $F(p(x), \beta_1 q_1(x) + \beta_2 q_2(x))$

è simmetrica perché $F(x,y) = F(y,x)$ perché $\int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt = \int_{-1}^{1} q(t)\, p(t)\, dt$

è definita positiva? Sì: $\int_{-1}^{1} (p(x))^2 dx > 0$ PERCHÉ $(p(x))^2 > 0$.

n uno spazio vettoriale del $C^0_{[a,b]} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua} \}$ definisco

$: C^0_{[a,b]} \times C^0_{[a,b]} \to \mathbb{R}$

$(f, g) \longmapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ È FORMA BILINEARE SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA.

DEFINIZIONE:

gli spazi vettoriali in cui abbiamo definito una forma bilineare simmetrica definita positiva sono detti $\boxed{\text{SPAZI EUCLIDEI}}$.

ossiamo considerare le forme quadratiche associate $\Rightarrow$ nell'esempio 1):

$Q(x) = Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ per $x \neq 0$, mentre nell'esempio 2):

$Q(p(x)) = \int_{-1}^{1} p^2(x)\, dx$ e nell'esempio 3): $Q(f(x)) = \int_a^b f^2(x)\, dx$

In uno spazio euclideo posso considerare sempre $\sqrt{Q(x)}$ $\Rightarrow$ pongo $\boxed{\|x\| = \sqrt{Q(x)}}$ $\boxed{\text{NORMA DI } X}$

La forma bilineare che definisce lo spazio euclideo è detta $\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE}}$

Il prodotto scalare dell'esempio 1), esteso ad $\mathbb{R}^n$, cioè $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, è detto

prodotto scalare standard e si indica così: $x \cdot y$; $\langle x, y \rangle$; (x, y).

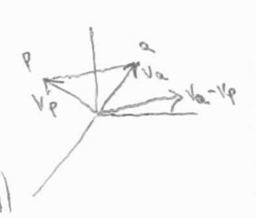
$\Rightarrow$ la norma di x, $\|x\|$, è $\boxed{\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}}$

~~Consideriamo~~ Su $\mathbb{R}^4$ la forma quadratica $Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c x_4^2$, $c > 0$,

NON È UN PRODOTTO SCALARE!

è detta forma quadratica di Minkowski: È INDEFINITA: LO SPAZIO $\mathbb{R}^4$ CON QUESTA FORMA QUADRATICA È LO SPAZIO DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA.

In $\mathbb{R}^n$ euclideo possiamo misurare la distanza tra due punti P e Q: è data dalla $\|V_Q - V_P\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (q_j - p_j)}$.



LA FORMA BILINEARE DEFINISCE LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO!

Proposizione: Dati due vettori V e W di $\mathbb{R}^n$ euclideo $\Rightarrow |V \cdot W| \leq \|V\| \cdot \|W\|$

(DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARZ)

Dimostrazione: 1° caso: v e w sono lin. dip. $\Rightarrow w = \alpha v \Rightarrow |v \cdot (\alpha v)| = |\alpha\, v \cdot v| =$

$$= |\alpha| \cdot |v \cdot v| = |\alpha| \cdot ||v||^2 = ||v|| \cdot |\alpha|\, ||v|| = ||v||\, ||\alpha v||$$

2° caso: v e w sono lin. indip. $\Rightarrow$ considero $U = \langle\langle v, w \rangle\rangle$

$$\Rightarrow [F]_U = \begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix} = (v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2 > 0$$

(per Jacobi PERCHÉ SAPPIAMO CHE F È DEFINITA POSITIVA) $\Rightarrow$

$$(v \cdot w)^2 < (v \cdot v)(w \cdot w)$$

$$(v \cdot w)^2 < ||v||^2 \cdot ||w||^2$$

$$\sqrt{(v \cdot w)^2} < \sqrt{||v||^2} \cdot \sqrt{||w||^2}$$

$$|v \cdot w| < ||v||\, ||w|| \qquad \text{c.v.d.}$$

<ins>Disuguaglianza</ins> <ins>triangolare</ins>: dati due vettori v e w

$$\Rightarrow ||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$$

<ins>Dimostrazione</ins>: $||v+w||^2 = (v+w)(v+w) = v \cdot v + w \cdot v + v \cdot w + w \cdot w =$

$$= v \cdot v \underset{\uparrow \text{ per simmetria}}{+ 2\, v \cdot w} + w \cdot w =$$

$$= ||v||^2 + ||w||^2 + 2\, v \cdot w \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2\, ||v||\, ||w|| = (||v|| + ||w||)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ estraendo le radici otteniamo la proposizione:

se v e w sono ortogonali $\Rightarrow v \cdot w = 0 \Rightarrow ||v+w||^2 = (v+w) \cdot (v+w) = v \cdot v + w \cdot w =$

$= ||v||^2 + ||w||^2$ e si ritrova il $\boxed{\text{teorema di Pitagora}}$

La disuguaglianza di Schwarz è $|v \cdot w| \leq ||v||\, ||w|| \Rightarrow \frac{|v \cdot w|}{||v||\, ||w||} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ pongo $\cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{||v||\, ||w||}$, $\theta \in [0, \pi]$, poiché $-1 \leq \cos\theta \leq 1$!

$\Rightarrow v \cdot w = \cos\theta\, ||v||\, ||w||$.

Se $v \cdot w = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ~~due vettori sono ortogonali~~ $\Leftrightarrow$ v e w sono <ins>PERPENDICOLARI</ins>

L'ortogonalità è associata alla forma; la perpendicolarità è associata all'angolo $\Rightarrow$
Nello spazio euclideo perpendicolarità e ortogonalità coincidono.