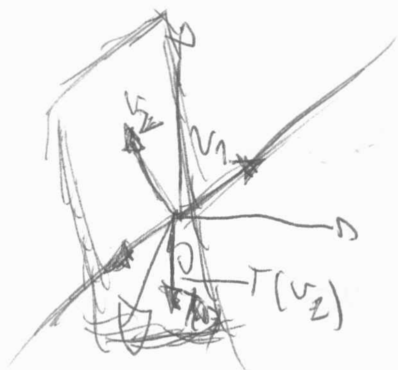
11/05/2015

OSSERVAZIONE:

PER DECIDERE IL VERSO DI UNA ROTAZIONE POSSIAMO DETERMINARE IL SEGNO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE COSÌ FATTA: LA PRIMA COLONNA È DATA DALLE COORDINATE, NELLA BASE INIZIALE, DI UN VETTORE POSTO SULL'ASSE DI ROTAZIONE: v_1



LA SECONDA COLONNA È DATA DALLE COORDINATE, SEMPRE NELLA BASE INIZIALE, DI UN VETTORE NEL PIANO DI ROTAZIONE: v_2

LA TERZA COLONNA È DATA DALLE COORDINATE, NELLA BASE INIZIALE, DEL TRASFORMATO DI v_2, $T(v_2)$.

I TRE VETTORI FORMANO UNA TERNA DESTRORSA O SINISTRORSA A SECONDA CHE LA ROTAZIONE ABBIA VERSO ~~NEGATIVO~~ POSITIVO O NEGATIVO. PERTANTO SE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE COSÌ COSTRUITA È POSITIVO, LA ROTAZIONE È POSITIVA; SE IL DETERMINANTE È NEGATIVO LA ROTAZIONE È NEGATIVA.

ESERCIZIO (DA FARE) DIMOSTRARE CHE LA COPPIA DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI v_1, v_2 DI $\mathbb{R}^2$ È DESTRORSA SE IL DETERMINANTE $\det([v_1],[v_2]) > 0$

ESEMPIO (RIPRENDENDO L'ESERCIZIO SVOLTO NELLA LEZIONE PRECED.)

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad v_3 = \begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

: CERCHIAMO IL VERSO DELLA ROTAZIONE DI MATRICE

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\-2 & 1 & 2\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$T(v_2) = v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\-2 & 1 & 2\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2/3\\0 & 1 & 1/3\\1 & 0 & -2/3\end{pmatrix} \qquad \det B = \left|\begin{pmatrix}1 & 2/3\\1 & -2/3\end{pmatrix}\right| = -\frac{2}{3}-\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} < 0$$

ROTAZIONE NEGATIVA

$$\text{QUINDI} \quad [T]_{\mathcal{B}_{1n}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1/3 & \frac{2\sqrt{3}}{3}\\0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 1/3\end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE DI CARATTERE PIÙ GENERALE

IN UNO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$ CONSIDERO L'OPERATORE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. ALLORA DICIAMO **OPERATORE AGGIUNTO** DI T, E SI INDICA CON T^*, L'OPERATORE $T^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE $T(u)\cdot v = u \cdot T^*(v) \ \forall u,v \in \mathbb{R}^n$

ABBIAMO DEFINITO T ISOMETRICO

$\iff T^* = T^{-1}$

DEFINIAMO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **OPERATORE SIMMETRICO** $\iff T^* = T$ CIOÈ $T(u)\cdot v = u\cdot T(v) \ \forall u,v \in \mathbb{R}^n$.

Sia $\mathcal{B}_{on}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, euclideo, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrico; pongo: $[T]_{\mathcal{B}_{on}} = A$ e dati u e $v \in \mathbb{R}^n$

$[u]_{\mathcal{B}_{on}} = X$ $[v]_{\mathcal{B}_{on}} = Y$ $\Rightarrow$ TALE BASE $\mathcal{B}_{on}$ È PRESA NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO DI T

$[T(u)]_{\mathcal{B}_{on}} = AX$ $[T(v)]_{\mathcal{B}_{on}} = AY$ $\Rightarrow$ PER DEFINIZIONE DI T SIMMETRICO $\Rightarrow T(u)\cdot v = u\cdot T(v) \Rightarrow (AX)^T \cdot I \cdot Y = X^T \cdot I \cdot AY$

$$X^T A^T I \cdot Y = X^T I A Y$$
$$X^T A^T Y = X^T A Y$$

POICHÉ VALE L'UGUAGLIANZA $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A^T = A$, CIOÈ A È SIMMETRICA.

PROPOSIZIONE: AUTOVETTORI DI UN OPERATORE SIMMETRICO RELATIVI AD AUTOVALORI DISTINTI SONO ORTOGONALI

Dim: SIANO $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ AUTOVALORI DI T E $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ AUTOVETTORI CIOÈ TALI CHE $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ E $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ CON T OPERATORE SIMMETRICO

SO CHE $T(v_1)\cdot v_2 = v_1 \cdot T(v_2)$ PERCHÉ T È SIMMETRICO

$$(\lambda_1 v_1)\cdot v_2 = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) \Rightarrow \lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2)$$

$(\lambda_1-\lambda_2)(v_1\cdot v_2)=0$

SONO DIVERSI QUINDI $\lambda_1-\lambda_2\neq 0 \Rightarrow v_1\cdot v_2=0 \Rightarrow$ QUINDI SONO ORTOGONALI

PROPOSIZIONE SE U È INVARIANTE PER $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ SIMMETRICO $\Rightarrow U^\perp$ È INVARIANTE PER T

Dim DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE SE $w\in U^\perp \Rightarrow T(w)\in U^\perp$ $\Rightarrow$ $u\cdot T(w)=0$ SE $u\in U$ $\quad u\cdot T(w)=T(u)\cdot w$ POICHÉ U È INVARIANTE PER T, $T(u)\in U \Rightarrow T(u)\cdot w=0$ $\Rightarrow u\cdot T(w)=0 \Rightarrow T(w)\in U^\perp$

OSSERVAZIONE SE LA MATRICE A NON È SIMMETRICA O ORTOGONALE ALLORA AUTOSPAZI RELATIVI AD AUTOVALORI DIVERSI IN GENERALE NON SONO ORTOGONALI

ESEMPIO: $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix} \Rightarrow \exists$ DUE AUTOVALORI DISTINTI

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=4 \quad E_1: x+y=0 \quad E_4: 2x-y=0$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1-2=-1$$

PROPOSIZIONE

SIA A UNA MATRICE SIMMETRICA REALE $\Rightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI DI A SONO REALI, CIOÈ TUTTE LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A SONO REALI.

Dim SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA RADICE COMPLESSA $\lambda_0\in\mathbb{C}$ DI $|A-\lambda I|=0$ $\Rightarrow$ SIA z_0 LA SOLUZIONE COMPLESSA DEL SISTEMA $(A-\lambda_0 I)z_0=0$, $z_0\in\mathbb{C}^n$

E SAPPIAMO CHE z_0 È AUTOVETTORE RELATIVO A λ_0 PER L'OPERATORE $S:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, $z\mapsto Az$ $\Rightarrow Az_0=\lambda_0 z_0$

$\Rightarrow$ CONSIDERO I LORO CONIUGATI $\overline{Az_0}=\overline{\lambda_0 z_0}$

$\overline{A\,\overline{z_0}} = \overline{\lambda_0}\, \overline{z_0}$ CONSIDERO L'OPERATORE SIMMETRICO ASSOCIATO

$\parallel$

$A\overline{z_0} = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}$ AD A IN UNA BASE ORTONORMALE, SIA ESSO J

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow z \cdot T(w) = T(z) \cdot w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n$

CONSIDERO $\overline{z_0}^T \cdot \lambda_0 z_0 = \overline{z_0}^T \cdot A \cdot z_0 = \lambda_0 \overline{z_0}^T \cdot z_0$

$= \overline{z_0}^T (A z_0) = (\overline{z_0}^T A) z_0 = (\overline{z_0}^T A^T) z_0 = (A\overline{z_0})^T z_0$

PERCHÉ A SIMMETRICA $A = A^T$

$= (\overline{\lambda_0}\,\overline{z_0})^T z_0 = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}^T z_0 \Rightarrow \lambda_0 \overline{z_0}^T z_0 = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}^T z_0 \Rightarrow$

$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \underbrace{\overline{z_0}^T z_0}_{\neq 0} = 0 \qquad \lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ ASSURDO PERCHÉ COMPLESSO

TEOREMA DI STRUTTURA ~~DEGLI~~ DEGLI OPERATORI SIMMETRICI

DATO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO ALLORA ESISTE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_{+n}$) TALE CHE $[T]_{\mathcal{B}_{+n}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ (DIAGONALE)

DIM PER INDUZIONE SU n

1) VERIFICA PER $n = 1$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \to \lambda\lambda$ $\quad [T]_{\mathcal{B}} = (\lambda)$

2) SI SUPPONE DIMOSTRATO FINO ALLA DIMENSIONE $n-1$ E LO DIMOSTRIAMO PER n

SIA λ AUTOVALORE REALE DI T E v SUO AUTOVETTORE

$\Rightarrow$ CONSIDERO $V = \langle v \rangle$ E $V^\perp$ IL SUO COMPLEMENTO ORTOGONALE $\Rightarrow \dim V^\perp = n-1 \quad V^\perp$ È INVARIANTE PER T

CIOÈ $T|_{V^\perp}: V^\perp \to V^\perp$; $T|_{V^\perp}$ È ANCORA UN OPERATORE SIMMETRICO

ALLORA PER IPOTESI INDUTTIVA $\exists\, \mathcal{B}'_{+n}$ DI $V^\perp$ TALE CHE $[T]_{\mathcal{B}'_{+n}}$ DIAGONALE

$\Rightarrow$ COSTRUISCO UNA BASE $\mathcal{B}$ DI $\mathbb{R}^n$ $\quad \mathcal{B} = \left\{\frac{v}{\|v\|}\right\} \cup \mathcal{B}'_{+n}$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ È BASE ORTONORMALE E $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & [T]_{\mathcal{B}'_{+n}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$