SPAZI LEGATI AD UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$

1) • DATA UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$, SIA Σ_0 IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO AD ESSA ASSOCIATO $\Longrightarrow$ $Sol\,\Sigma_0$ È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^n$ DI DIMENSIONE $n - rg\,A$ DI CUI UNA BASE È DATA DALLE SOLUZIONI FONDAMENTALI DEL SISTEMA $\Rightarrow$ SE $A' \sim A$ ALLORA LO SPAZIO $Sol\,\Sigma_0$ SI PUÒ DETERMINARE ANCHE A PARTIRE DA A'

2) • CONSIDERO I p VETTORI RIGA DI A, CONSIDERO $\mathcal{R} = \langle\langle R_1, R_2, \dots, R_p \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

$\downarrow$ SPAZIO RIGA DI A

$\dim \mathcal{R} = rg\,A = \rho$ IL RANGO MI DICE QUANTI VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$=$ CARDINALITÀ DELLA BASE

$$B_\rho = \{ R_{i_1}, \dots, R_{i_\rho} \}$$

SE $A' \sim A$, CAMBIA LO SPAZIO VETTORIALE GENERATO DAI VETTORI RIGA? CIOÈ $\mathcal{R}_{A'} = \mathcal{R}_A$?

\- IL RANGO SI MANTIENE, QUINDI LE DIMENSIONI DELLO SPAZIO GENERATO DALLE RIGHE DI A' E DI QUELLO GENERATO DA RIGHE DI A COINCIDONO.

$\Downarrow$

$\dim R' = \dim R$

\- $R' = R$ PERCHÉ GLI ELEMENTI DI R' SONO IL RISULTATO DI COMBINAZIONI LINEARI (DI ELEMENTI DI) R E VICEVERSA

INFATTI: $R' \subseteq R$

DIMOSTRAZIONE: SIA $\ell \in R' \Rightarrow$ O ℓ È OTTENUTA DA UNA RIGA DI A MOLTIPLICATA PER UNO SCALARE, OPPURE È OTTENUTA DALLA SOMMA ALGEBRICA DI DUE RIGHE DI A

$\Rightarrow$ ℓ È SEMPRE DATA MEDIANTE COMBINAZIONE LINEARE DI RIGHE DI $A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ POICHÉ R È CHIUSO RISPETTO ALLE OPERAZIONI $\Rightarrow$ $\ell \in R$

\- ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE $R \subseteq R' \Rightarrow R = R'$

3) • CONSIDERO GLI n VETTORI COLONNA DI A E DEFINISCO LO SPAZIO COLONNA $\mathcal{C}_A$ DI $A = \langle\langle C_1, C_2, \dots, C_n \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^p$

$\dim \mathcal{C}_A = rg\,A = \rho$ $\rightarrow$ STESSA DIMENSIONE DELLO SPAZIO RIGA, MA IN UN ALTRO SPAZIO

$$B_{\mathcal{C}_A} = \{ C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_\rho} \}$$

SE $A' \sim A \Rightarrow C_A = C_{A'}$? SUBITO POSSIAMO AFFERMARE CHE IL RANGO È LO STESSO, QUINDI $\boxed{\dim C_{A'} = \dim C_A}$

MA $C_{A'} \neq C_A$ PERCHÉ LE OPERAZIONI SULLE RIGHE CAMBIANO IN MANIERA DISORDINATA LE COLONNE $\rightarrow$ DIMOSTRO DANDO UN CONTROESEMPIO

TUTTAVIA I VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI OCCUPANO LA STESSA POSIZIONE NELLE DUE MATRICI E SE UN VETTORE COLONNA $C_j(A)$ È COMBINAZIONE LINEARE DI ALTRE COLONNE MEDIANTE GLI SCALARI α_{ij}, CIOÈ $C_j(A) = \alpha_{1j} C_{i_1}(A) + \alpha_{2j} C_{i_2}(A) + \dots + \alpha_{pj} C_{i_p}(A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_j(A') = \alpha_{ij} C_{i_1}(A') + \dots + \alpha_{pj} C_{i_p}(A')$$

CON QUESTE CONSIDERAZIONI $\Rightarrow$ SE B È LA MATRICE EQUIVALENTE AD A RIDOTTA A GRADINI IN FORMA CANONICA $\Rightarrow$ POSSIAMO DEDURRE CHE IN B HO VETTORI COLONNA DELLA BASE CANONICA DOVE IN A C'ERANO I VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E LE COORDINATE DEI VETTORI COLONNA LINEARMENTE DIPENDENTI SONO PROPRIO GLI SCALARI DELLA SUA COMBINAZIONE LINEARE

ESEMPIO:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \underset{2R_1 - R_3 \to R_3}{\overset{R_1 + R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{R_3/5 \to R_3}{\overset{R_2/2 \to R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2 - R_3 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2R_2 - R_1 \to R_1}{\sim}$$

$\text{rg} A = 2$

$C_3(A) = C_1(A) + C_2(A)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-R_1 \to R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

HO OTTENUTO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE

ERANO INDIPENDENTI E HO OTTENUTO I VETTORI DELLA BASE CANONICA

DATI DUE SOTTOSPAZI U E W DI UNO SPAZIO V n-DIMENSIONALE, DA UN PUNTO DI VISTA INSIEMISTICO POSSO DETERMINARE $U \cap W$ E $U \cup W$ SOTTOINSIEMI DI $V \Rightarrow$ $U \cap W$ E $U \cup W$ SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI?

<u>PROPOSIZIONE</u>: $U \cap W$ È SOTTOSPAZIO DI V

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: $U \cap W = \{ v \in V \text{ TALE CHE } v \in U \text{ E } v \in W \}$

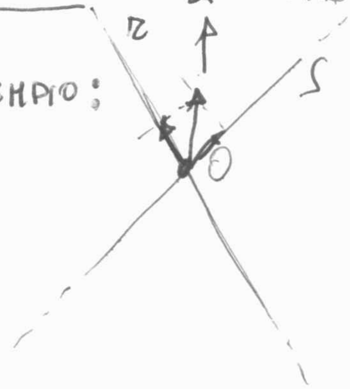
1) $0 \in U \cap W$? SÌ PERCHÉ $0 \in U$ E $0 \in W$ IN QUANTO SOTTOSPAZI

2) SE $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U \cap W \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ E $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
PERCHÉ SOTTOSPAZI $\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U \cap W \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$U \cup W$:

LA SOMMA DI DUE VETTORI NON SEMPRE APPARTIENE ALL'INSIEME $\rightarrow$ $U \cup W$ NON È SEMPRE UNO SOTTOSPAZIO

CONTROESEMPIO:



$\rightarrow$ INSIEMISTICAMENTE È L'UNIONE

$r \cup s$ NON È UN SOTTOSPAZIO PERCHÉ NON È CHIUSO RISPETTO ALLE OPERAZIONI.

QUAL È IL PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$ CHE CONTIENE $U \cup W$? $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ STESSO IN QUESTO ESEMPIO $\rightarrow$ PIANO GENERATO DALLE COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI DELLE DUE RETTE

DEFINIZIONE: SI CHIAMA SPAZIO SOMMA DEI DUE SOTTOSPAZI U E W E SI INDICA $U+W$, PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO DI V CHE CONTIENE $U \cup W$.
SE $U \cap W = \{0\}$ $\Rightarrow$ LO SPAZIO SOMMA È DETTO SOMMA DIRETTA E SI SCRIVE $U \oplus W$

TEOREMA DI GRASSMANN

DATI $U, W \subseteq V \Rightarrow \dim U + \dim W = \dim(U+W) - \dim(U \cap W)$