Sia T l'operatore associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 9/03/2015

nella base canonica. T è diagonalizzabile? $\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

Se sì dare la base B rispetto alla quale $[T]_B = D$ $\left(A = [T]_{\mathcal{E}}\right)$

RISOLUZIONE

$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$

1) VETTORI COLONNA di A sono i GENERATORI DELL'IMMAGINE e occorre trovare il rango della matrice ~~per~~ ovvero quali VETTORI COLONNA sono LINEARMENTE INDIPENDENTI.

$rg\, A = ?$ $\quad A \underset{R_1 - R_4 \to R_4}{\overset{\substack{R_1 - R_2 \to R_2 \\ R_1 - R_3 \to R_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A' = -2(-4) + 2(4) \neq$
$\neq 0$

$rg\, A = 4 \Rightarrow$
la dimensione dell'immagine è 4, l'APPLICAZIONE è SURIETTIVA e per il teorema delle dimensioni è anche INIETTIVA, quindi l'APPLICAZIONE è BIETTIVA.

T è diagonalizzabile?

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{R_3 - R_4 \to R_3}{\overset{R_2 - R_3 \to R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{(1-\lambda)R_3 + R_1 \to R_1}{\underset{(1-\lambda \neq 0)}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & -(1-\lambda)^2+1 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow (2-\lambda)(\lambda-2)^2 - (2-\lambda)(2-\lambda)^2 +$$

$$-(2-\lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)^2 - (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - (2-\lambda)\lambda\right) =$$

$$= (2-$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big[(1-\lambda)\big((1-\lambda)^2-1\big) + (-2+\lambda) - (2-\lambda)\Big] +$$

$$- \Big[\underbrace{\big((1-\lambda)^2-1\big) + 2}_{(\lambda-2)(\lambda-2)} - \lambda - (-2+\lambda)\Big] + \underbrace{(-2+\lambda) - (1-\lambda)}_{(\lambda-2)(2-\lambda)}(2-\lambda) +$$

$$- \Big[2-\lambda - \underbrace{(1-\lambda)(-2+\lambda)}_{(2-\lambda)(2-\lambda)}\Big] =$$

$$= (-2+\lambda)^2(\lambda^2-1) - (\lambda-2)^2 - (2-\lambda)^2 - (2-\lambda)^2 =$$

$$= (-2+\lambda)^2\big[-(+\lambda+1)(1-\lambda) - 3\big] \qquad = (2-\lambda)^2(\lambda^2-4)$$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE DI SPETTRO DI MATRICE}}$

Lo spettro di A è l'insieme degli autovalori ripetuti tante volte quanto è la loro molteplicità.

$\Rightarrow$ LO SPETTRO DI A è:

$$\text{Spettro } A = \{2, 2, 2, -2\}$$

[POICHÉ $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3(-2-\lambda)$].

$$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow rg = 1 \Rightarrow \dim E_2 = 3 \Rightarrow$$

la dimensione coincide con la molteplicità

$$\Rightarrow E_2 : -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 = x_2 + x_3 + x_4$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1

$$B_{E_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2} = \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \qquad E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_4}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\downarrow$

INFATTI:

$T(v_4) = -2v_4 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 - 2v_4$, $T(v_1) = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$

$T(v_2) = 2v_2 = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3 + 0v_4$; $T(v_3) = 2v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 2v_3 + 0v_4$