Teorema di struttura per operatori isometrici: 04/05/15 (1)

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometrico, $\exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n}$, tale che

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & -1 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & M_1 & & 0 \\ & 0 & & & M_2 \cdots M_K & \end{pmatrix}$$ dove

$$M_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\operatorname{sen}\theta_j \\ \operatorname{sen}\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix} \quad 0 < \theta_j \leq \pi, \; j = 1, \ldots K$$

Dimostrazione: per induzione su n

1) verifica per $n=1$ infatti $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è isometrico $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ o $T(x) = x$ oppure $T(x) = -x$ $\Rightarrow$ verificato, perché

$[T]_e = (1)$ oppure $[T]_e = (-1)$

[ABBIAMO ANALIZZATO ANCHE LE ISOMETRIE $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: nel piano ci sono o le rotazioni o le SIMMETRIA RISPETTO AD UNA RETTA, tutti gli altri sono operatori che sono combinazioni di queste ultime.]

(Una TRASLAZIONE è un'ISOMETRIA, ma non un OPERATORE, poiché non è LINEARE e non ASSOCIABILE AD UNA MATRICE)

2) Supponiamo verificato il teorema per operatori $T: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ per $k = 1, 2, \ldots, n-1$ e vogliamo dimostrarlo per $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Sia B una qualunque base di $\mathbb{R}^n$ e sia $[T]_B = A$

Considero $|A - \lambda I| = 0$ e determiniamo un autovalore di T (2)

In $\mathbb{C}$ le radici (DEL POLINOMIO CARATTERISTICO) si hanno sempre, ed le radici coincidono col numero del grado del polinomio (CIOÈ) avremo tante radici (IL NUMERO DELLE) quanto è il grado del polinomio. In $\mathbb{R}$ non è detto.

Si considera il caso dell'AUTOVALORE REALE.

Determiniamo un autovalore di T: tale autovalore può non essere reale, ma in $\mathbb{C}$ esiste sempre. PRENDIAMO λ_0 REALE $\Rightarrow$

Sia λ_0 tale autovalore e supponiamo $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ sia $v \in \mathbb{R}^n$ autovettore associato a tale autovalore, cioè $T(v) = \lambda_0 v$, quindi abbiamo le possibilità o $\lambda_0 = +1$ o $\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ o $T(v) = v$ o $T(v) = -v$; considero $\langle\langle v \rangle\rangle = V$ e sia $V^\perp$ il suo complemento ortogonale $\Rightarrow \dim V^\perp = n-1$ e $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ considero $T|_{V^\perp}$ è ancora isometrico $\in T|_{V^\perp}: V^\perp \to V^\perp$ poiché $V^\perp$ è invariante per T (poiché lo è V) $\Rightarrow T(V^\perp) \subseteq V^\perp \Rightarrow T|_{V^\perp}: V^\perp \to V^\perp$

(cioè $T|_{V^\perp}: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$)

Allora per ipotesi induttiva $\exists$ una base $B'_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^{n-1}$, rispetto alla quale $[T|_{V^\perp}]_{B'_{\perp n}}$ ha la forma cercata.

Considero $\frac{v}{\|v\|}$, tale vettore è ortogonale a tutti i vettori di $B'_{\perp n}$, pertanto $\left\{\frac{v}{\|v\|}\right\} \cup B'_{\perp n} = B_{\perp n}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

~~e~~ ③

$$e\ [T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & 0 & \\ & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & M_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & M_K \end{pmatrix}$$

e quindi è dimostrato.

Caso 2) λ_0 sia complesso (vedi appunti online)

c.v.d.

In $\mathbb{R}^2$ posso avere $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{identità} \\ \text{(rotazioni per } \theta = 0)}}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{simmetria} \\ \text{rispetto all'asse x}}}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{rotazione di } \theta = \pi}$,

$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotazione di angolo } \theta \quad 0 < \theta < \pi}$ e basta. (la matrice non è simmetrica e non è diagonalizzabile)

Le rotazioni hanno tutte determinante $= +1$, le simmetrie invece hanno determinante $= -1$, sia che siano SIMMETRIE PURE che COMBINAZIONI DI SIMMETRIE E ROTAZIONI

Il determinante di matrici associate a rotazioni è $+1$

il determinante di matrici associate a simmetrie è -1

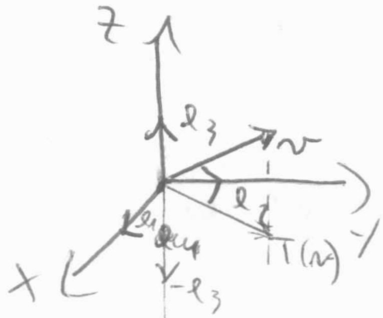
(vale a il determinante $= -1$, se ~~il sistema~~ l'operatore è dato mediante composizioni di isometrie, tra le quali c'è una simmetria)

In $\mathbb{R}^3$: $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

ABBIAMO:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$



$T(e_1) = e_1$

$T(e_2) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 = e_2$

$T(e_3) = 0e_1 + 0e_2 - 1e_3 = -e_3$

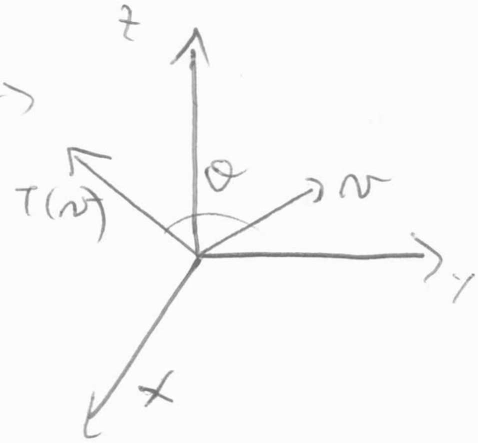
$T(xe_1 + ye_2 + ze_3) =$

$= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) =$

$= xe_1 + ye_2 - ze_3$

Questo è il RIBALTAMENTO o SPECCHIAMENTO o SIMMETRIA rispetto ad un piano

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longrightarrow$



rotazione piana attorno all'asse x ma in generale è lo modello di rotazione intorno ad un asse.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longrightarrow$ Composizione attorno ad un asse con un ribaltamento rispetto al piano definito dagli altri due assi. $\Longrightarrow$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Composizione fra un RIBALTAMENTO relativo al piano (5)
$x = 0$ e una rotazione attorno alla retta

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ di angolo θ $\quad 0 < \theta < \pi$

Esempio: Sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore

$$[T]_e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) T è isometria ?

2) Se sì che tipo di isometria è ?

3) Determinarne gli elementi caratteristici.

4) Determinare la "forma canonica" della matrice e la nuova base $\perp_n$ rispetto alla quale la matrice ha quella forma canonica.