2/03/'15

Definizione

Il grado massimo con cui compare un binomio del tipo $(x-\alpha)$ nella scomposizione di un polinomio di variabile x, e' detto **molteplicita' algebrica** della radice α e si indica con $\mu(\alpha)$

Quando il polinomio in questione e' il polinomio caratteristico associato ad una matrice A $\Rightarrow$ tale radice α e' un autovalore dell'operatore individuato dalla matrice A, fissata una base $\mathcal{B}$ nello spazio ambiente.

Considerato l'autospazio E_α associato all'autovalore α $\Rightarrow$ la $\dim E_\alpha$ e' detta **molteplicita' geometrica** di α

Osservazione

La molteplicita' geometrica di α e' sempre ≥ 1

Proposizione

La molteplicita' geometrica di un autovalore e' sempre $\leq$ alla sua molteplicita' algebrica.

Dimostrazione

Sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio ambiente e k la dimensione di un autospazio E_α associato all'autovalore α di $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$k \leq n$ perché E_α e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ considero una base $\mathcal{B}_{E_\alpha} = \{v_1, \dots, v_k\}$

Completiamo tale base ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & & \vdots & a_{2(k+1)} & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \vdots & & \\ & \vdots & & 0 & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 0 & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & k & & & \end{array}$$

Sappiamo che $T(v_1) = \alpha v_1$, $T(v_2) = \alpha v_2$, $\dots$, $T(v_k) = \alpha v_k$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \alpha - \lambda & 0 \cdots & 0 & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ & & & \alpha - \lambda & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & k & & & \end{array}$$

$$= (\alpha - \lambda) \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \cdots & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ & & \\ 0 & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= (\alpha - \lambda)^k \cdot p(\lambda) \qquad \text{con } \deg p(\lambda) = n - k$$

$\Rightarrow$ può accadere che $(\alpha - \lambda)$ sia fattore anche di $p(\lambda)$

$\Rightarrow$ molteplicità algebrica di $\alpha \geq \dim E_\alpha$

$\mu(\alpha) \geq \dim E_\alpha$ q.e.d.

Proposizione

Autovettori di un operatore $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, riferiti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione (per induzione sul numero di tali autovettori)

1. per $n = 1$ un autovettore v e' linearmente indipendente perche' $v \neq 0$ (per def.)

2. Supponiamo la proposizione dimostrata per k autovettori e dimostriamolo per $k+1$

Siano $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ autovettori relativi ad autovalori diversi cioe' $T(v_j) = \lambda_j v_j$ e $T(v_i) = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i, j = 1, \dots, k+1, i \neq j$

$\Rightarrow$ Considero $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = 0$ 1)
(devo dim che tutti gli a_j sono $= 0$)

$$\Rightarrow T\left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j v_j\right) = 0 \Rightarrow \text{per la linearita' di } T \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} a_j T(v_j) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} a_j \lambda_j v_j = 0$$

Moltiplico per λ_{k+1} la combinazione lineare 1)
(se λ_{k+1} e' 0 ce n'e' un altro non nullo)

$$\Rightarrow a_1 \lambda_{k+1} v_1 + a_2 \lambda_{k+1} v_2 + \dots + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

$\to$ Considero le due uguaglianze:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

$$a_1 \lambda_{k+1} v_1 + a_2 \lambda_{k+1} v_2 + \dots + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

sottraggo membro a membro $\Rightarrow$

$$a_1 v_1(\lambda_1-\lambda_{k+1}) + a_2 v_2(\lambda_2-\lambda_{k+1}) + \dots + a_k v_k(\lambda_k-\lambda_{k+1}) = 0$$

Ma per ipotesi induttiva $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

$\Rightarrow a_j(\lambda_j-\lambda_{k+1}) = 0 \quad \forall j=1,\dots,k$

ma $\lambda_j-\lambda_{k+1} \neq 0 \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j=1,\dots,k$

$\Rightarrow$ sostituendo in 1) rimane $a_{k+1} v_{k+1} = 0$,

ma $v_{k+1} \neq 0$ e quindi $a_{k+1} = 0$

$\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti

OSSERVAZIONI

1. Se dato $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, trovo n autovalori distinti $\Rightarrow$ la dimensione di ogni autospazio è 1

2. Come conseguenza della proposizione appena dim. nel caso si verifichi 1 si può dare una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori, $\mathcal{B} \Rightarrow [T]_\mathcal{B}$ è diagonale

3. Se λ_i e λ_j sono autovalori di T, con $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$ $E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}$

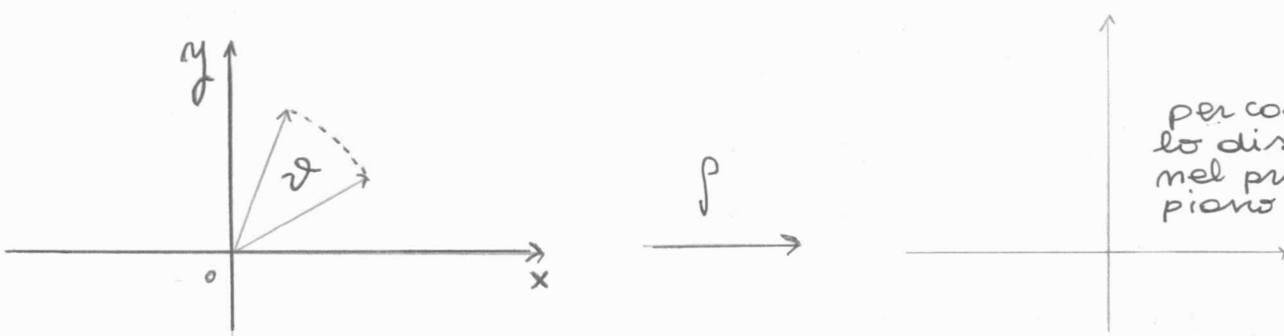
Definizione

Dato un operatore $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un sottospazio $\mathcal{U}$ di $\mathbb{R}^n$ e' detto **invariante** per T se
$T(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$

OSSERVAZIONE:
Ci sono sempre sottospazi invarianti.
Infatti $\{0\}$ e $\mathbb{R}^n$ sono invarianti $\forall$ operatore $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
Al solito essi sono detti **banali**

Esempi

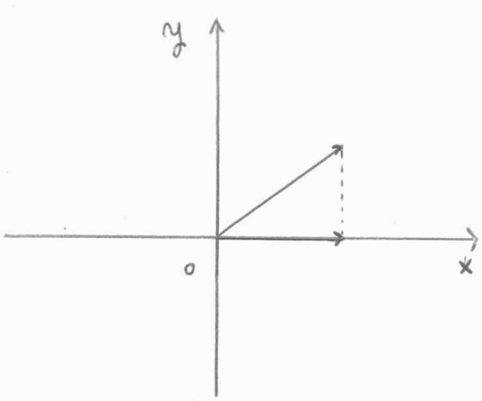
- $id: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tutti i sottospazi sono invarianti
- rotazione di angolo ϑ con $0 < \vartheta < \pi$, nel piano con verso positivo



per comodita' lo disegno nel primo piano

Nessun sottospazio invariante non banale

- rotazione nel piano con verso positivo di angolo $\vartheta = \pi$
ogni retta per 0 e' invariante
- proiezione sull'asse x nel piano



$\pi_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longmapsto (x, 0)$

$(0, y) \longmapsto (0, 0)$ $\quad T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$
$(x, 0) \longmapsto (x, 0)$ $\quad T(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$
asse x e asse y sono invarianti

Relazione tra sottospazi invarianti e autospazi

Sia E_λ un autospazio per $T: R^n \longrightarrow R^n$ $\Rightarrow$

se $v \in E_\lambda \Rightarrow T(v) = \lambda v \in E_\lambda \Rightarrow T(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$

$\Rightarrow$ <u>un autospazio è un sottospazio invariante</u>

[Un sottospazio invariante è un autospazio ? NON SEMPRE!
Controesempio (~~[illegible]~~)

Sia $\pi_x : R^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ base canonica

$(x, y) \longmapsto (x, 0)$

$$\Rightarrow [\pi_x]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) = 0$$

due autovalori $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1$

con molteplicità $\mu(0) = 1$

$\mu(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow E_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0 \\ \Rightarrow E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \text{AUTOSPAZI}$$

$\mathbb{R}^2$ È SOTTOSPAZIO INVARIANTE MA NON AUTOSPAZIO!