FUNZIONI FRA STRUTTURE ALGEBRICHE 1-12-2014

Definizione: Siano $(A, \square)$ e $(B, *)$ due strutture algebriche => definiamo MORFISMO tra tali strutture una applicazione tra gli insiemi A e B cioè $f: A \to B$ tale che $f(a_1 \square a_2) = f(a_1) * f(a_2)$ $\forall a_1, a_2 \in A$

(oppure Omomorfismo)

(OMOMORFISMO)

cioè l'immagine dell'ELEMENTO OTTENUTO MEDIANTE L'OPERAZIONE "$\square$" TRA DUE ELEMENTI del primo insieme è UGUALE ALL'ELEMENTO OTTENUTO MEDIANTE L'OPERAZIONE "$*$" FRA le immagini dei singoli elementi.

Se A e B sono gruppi => si parla di morfismo di gruppi

Esempio => Sia $A = B = \mathbb{R}$ e considero $(\mathbb{R}, +)$ ed $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 + x - 1$ => è un morfismo di gruppi?

devo dimostrare che $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) - 1 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 1$$

$$f(x_1) + f(x_2) = x_1^2 + x_1 - 1 + x_2^2 + x_2 - 1$$

queste due immagini sono $\neq$

=> f non è un morfismo di gruppi

Definizioni: Si dice EPIMORFISMO un morfismo suriettivo

Si dice ISOMORFISMO un morfismo biettivo

Esempio -> $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}$: questo è l'anello degli interi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

è un gruppo additivo ma non moltiplicativo in quanto $\nexists$ reciproci, ma comunque si comporta bene rispetto a due operazioni.

PIU' PRECISAMENTE:

$\mathbb{Q}$: * DIAMO IN $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ LA RELAZIONE DI EQUIVALENZA $(m_1, n_1) \, R \, (m_2, n_2) \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$

ad esempio la coppia $(2,3)$ è in relazione R con $(4,6)$: INFATTI => $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

è una classe di equivalenza $\left[\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{12} \dots \right.$

Quindi un numero razionale è una classe di equivalenza di numeri interi
COPPIE

$(\mathbb{Z},+)$ è gruppo abeliano

$(\mathbb{Z},\cdot) \rightarrow$ qui vale l'associatività, esiste l'elemento neutro, $\nexists$ il reciproco

$\downarrow$

quindi $(\mathbb{Z},\cdot)$ non è un gruppo

però se considero $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ in cui inoltre vale la distributiva del prodotto rispetto alla somma, allora $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ è $\boxed{\text{anello}}$. In più, se IN UNA STRUTTURA ALGEBRICA $(A,+,\cdot)$, OLTRE LE PROPRIETA' SU RIPORTATE, ESISTE il reciproco per tutti gli elementi (tranne, ovviamente, l'elemento neutro della somma) abbiamo quello che si chiama $\boxed{\text{CORPO}}$. In più se vale anche la proprietà commutativa DEL PRODOTTO abbiamo un $\boxed{\text{CAMPO.}}$

$\rightarrow$ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ (È ANELLO) $\qquad (\mathbb{Q},+,\cdot)$

└ (questo però è un campo)

$\mathbb{Z}$ E $\mathbb{Q}$ DA punto di vista insiemistico, e sia per le operazioni introdotte sono due strutture $\neq$.

Per dire che $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$:

devo trovare un'applicazione $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ CHE SIA UN ISOMORFISMO:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad n \rightarrow \frac{n}{1}$$

è un morfismo delle due strutture algebriche, infatti:

$$f(n+p) = \frac{n+p}{1}$$

$$f(n) + f(p) = \frac{n}{1} + \frac{p}{1} = \frac{n+p}{1}$$

e

$$f(np) = \frac{np}{1}$$

$$f(n)f(p) = \frac{n}{1}\frac{p}{1} = \frac{np}{1}$$

mi domando se l'applicazione è iniettiva:

Considero n e $p \in \mathbb{Z}$ ed $f(n)$ ed $f(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sia $f(n) = f(p) \Rightarrow \frac{n}{1} = \frac{p}{1} \Rightarrow n = p$ l'applicazione è iniettiva

Non è suriettiva ma se considero $f: \mathbb{Z} \to f(\mathbb{Z}) \Rightarrow$

f è biettiva e quindi f è isomorfismo

$\Rightarrow$ NON È $\mathbb{Z}$ CHE STA IN $\mathbb{Q}$, MA $f(\mathbb{Z})$ TRAMITE L'ISOMORFISMO INDIVIDUATO

non è $\mathbb{Z}$ a stare dentro $\mathbb{Q}$

I morfismi tra spazi vettoriali sono detti APPLICAZIONI LINEARI

Definizione: Dati V e W spazi vettoriali ed $L: V \to W$ $\Rightarrow$ L è lineare se $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$ e $L(\alpha v) = \alpha L(v)$ $\forall v \in V$ ed $\forall \alpha \in \mathbb{R}$