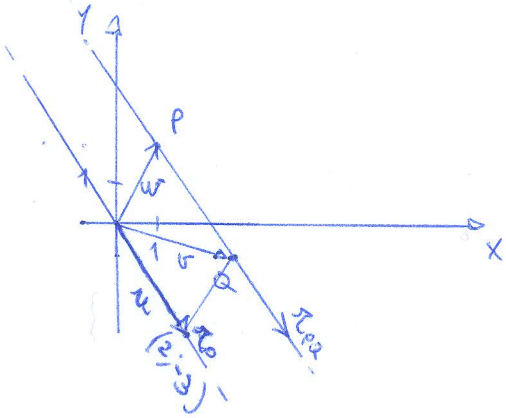
SOTTOSPAZI AFFINI DEL PIANO (in $\mathbb{R}^2$)

→ trovare la retta passante per $P(1;2)$ e $Q(3;-1)$



orientiamo r_{PQ}

sappiamo che $r_{PQ} \parallel r_0$

$u = v + (-w)$

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$r_{PQ} \parallel r_0 \qquad r_0: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

dall'eq. vettoriale ottieniamo la parametrica

EQ. PARAMETRICA DI r_0

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = -3s \end{cases}$$

CONSIDERIAMO IL VETTORE TRASLAZIONE $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r_{PQ}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

da cui r_{PQ}: $\begin{cases} x = 2s+1 \\ y = -3s+2 \end{cases}$ ← EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA RETTA PASSANTE PER I PUNTI P e Q

regola generale per l'eq. vettoriale $X = s(v_Q - v_P) + v_P$

(DALL'EQUAZIONE PARAMETRICA) ricavando il parametro s si ottiene l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} s = \dfrac{x-1}{2} \\ y = -3s+2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}(x-1) + 2$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ forniscono i parametri direttori della retta. gli altri parametri direttori sono multipli di $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. CIOÈ I PARAMETRI DIRETTORI DELLA RETTA SONO LE COORDINATE DI UN VETTORE DI BASE DELLA DIREZIONE r_0 DI r

→ fasci di rette

- proprio : infinite rette passanti per un pt
- improprio : rette parallele ad una retta data

<u>DEFINIZIONE</u>

Date 2 rette r ed s si dice "FASCIO" di rette di base r ed s, l'insieme di tutte le combinazioni lineari delle due rette.

Pertanto se r ha equazione $a_1 X + b_1 Y + c_1 = 0$ e
s ha equazione $a_2 X + b_2 Y + c_2 = 0$

⇒ il fascio ha equazione

$$\alpha (a_1 X + b_1 Y + c_1) + \beta (a_2 X + b_2 Y + c_2) = 0$$

Se $r \cap s = \{P\}$ ⇒ tutte le infinite rette del fascio passano per P.

⇒ il fascio è <u>PROPRIO</u> e P è detto <u>CENTRO</u> del fascio F.

Se $r // s$ ⇒ tutte le rette del fascio sono //
⇒ a_1 e b_1 sono proporzionali di un fattore K a a_2 e b_2. l'equazione del fascio diventa:

$$\alpha (a_1 X + b_1 Y + c_1) + \beta (K a_1 X + K b_1 Y + c_2) = 0$$

$$\alpha a_1 X + \alpha b_1 Y + \alpha c_1 + \beta K a_1 X + \beta K b_1 Y + K c_2 = 0 \Rightarrow$$

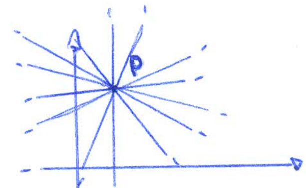
LA DIREZIONE È $(\alpha + K\beta) a_1 X + Y b_1 (\alpha + K\beta) = 0$ E I COEFFICIENTI SONO PROPORZIONALI AD a_1 E b_1 E QUINDI LA DIREZIONE DI OGNI RETTA DEL FASCIO È LA STESSA DI r e s.

...

Se $r // s$ $\Rightarrow$ il fascio è ~~improprio~~ IMPROPRIO.

ESERCIZIO

- fascio di rette con centro $P(1;2)$



$aX + bY + c = 0$ $\Rightarrow$ SOSTITUISCO LE COORDINATE

DI P $\Rightarrow$ $a\,1 + b \cdot 2 + c = 0$ $\rightarrow$ $c = -a - 2b$

$\downarrow$ SOSTITUISCO

$aX + bY - a - 2b = 0$ $\Rightarrow$

RACCOLGO a e b $\Rightarrow$

eq. del fascio cartesiana ottenuta $\leftarrow$ $a(X-1) + b(Y-2) = 0$

oppure scelgo due rette passanti per P, come $Y=2$ e $X=1$, il fascio sarà

$$\alpha(X-1) + \beta(Y-2) = 0 .$$

- determinare la retta del fascio di rette con centro P, parallela alla retta $X + Y - \sqrt{2} = 0$.

l'equazione che ottengo da $P(1;2)$ è la precedente

$$\alpha X + \beta Y - \alpha - 2\beta = 0$$

le due rette (la retta data dal testo e quella ricercata) hanno la stessa direzione, cioè $X + Y = 0$

deve ~~...~~ ESSERE la stessa retta di $\alpha X + \beta Y = 0$ $\Rightarrow$ I

COEFFICIENTI DEVONO ESSERE PROPORZIONALI $\Rightarrow$

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{1} \rightarrow \alpha = \beta$$

...

CONSIDERIAMO IL FASCIO

$$\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

È IN FUNZIONE DI DUE PARAMETRI CHE NON SONO ENTRAMBI NULLI

Se $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ dividendo per α ottengo

$$a_1 x + b_1 y + c_1 + \boxed{\frac{\beta}{\alpha}}(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

per comodità scrivo $\frac{\beta}{\alpha}$ come un solo parametro $k = \beta/\alpha$.

attenzione: così facendo "perdiamo" dall'eq. del fascio la retta $a_2 x + b_2 y + c_2$, che si rivela spesso la retta cercata.

SOTTOSPAZI AFFINI in $\mathbb{R}^3$

sono: tutti i piani, le rette, i punti e $\mathbb{R}^3$ stesso.

→ ricavare le equazioni, studiare parallelismi, intersezioni ... ←

→ eq. retta in $\mathbb{R}^3$: cartesiana

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

con $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

questo sistema ha soluzione perché

$$rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

l'aggiunta di questa colonna non modifica il rango PERCHÉ NELLA MATRICE INCOMPLETA CI SONO GIÀ DUE VETTORI RIGA CHE sono linearmente INDIPENDENTI E ANCHE NELLA COMPLETA CI SONO DUE VETTORI RIGA LINEARMENTE INDIPENDENTI

ESAMINIAMO I CASI POSSIBILI DI RANGO PER UNA MATRICE INCOMPLETA E LA SUA MATRICE COMPLETA:

Se $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow$ controlliamo il rango della matrice completa

$$rg\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right) = \begin{cases} 1 \mapsto \ldots & 1) \\ 2 \mapsto \ldots & 2) \end{cases}$$

dipende dalla dipendenza lineare e dai minori 2x2 presenti

prima serve minore 2x2 ovvero det = 0, ora questo è possibile

1) ... $\mapsto$ se $rg(A|B) = 1$ il sistema ha soluzione per il TEOREMA DI ROUCHE-CAPELLI, e dim Sol $\Sigma = 2$

cioè le due equazioni del primo sistema indicano due piani in $\mathbb{R}^3$.
il corrispettivo geometrico è l'intersezione geometrica dei due piani, ovvero ~~...~~ Sol Σ. CHE QUINDI È QUEL PIANO STESSO

2) ... $\mapsto$ Σ non ha soluzione, ovvero i due piani non si intersecano e non si ottiene nessuno spazio.

---

cerchiamo ora l'equazione parametrica DELLA RETTA A PARTIRE DALLA CARTESIANA

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 t = d_1 \rightarrow x = \dfrac{-b_1 y - c_1 t + d_1}{a_1} \\ a_2 x + b_2 y + c_2 t = d_2 \end{cases}$$

sostituzione di x ...

$$\dots \quad a_2\left(\frac{-b_1y - c_1z + d_1}{a_1}\right) + b_2y + c_2z = d_2$$

$$(-b_1a_2 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + c_2a_1)z + a_2d_1 - a_1d_2 = 0$$

$$y = \frac{(a_2c_1 - c_2a_1)z - a_2d_1 + a_1d_2}{(-b_1a_2 + a_1b_2)}$$

e così via, sostituendo nell'altra eq del sistema y ...

al termine dei calcoli trovo s e l'equazione parametrica

ESEMPIO CONCRETO

$$r: \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$ il sistema ha soluzione, PERCHÈ HA RANGO 2 $\Rightarrow$ procediamo

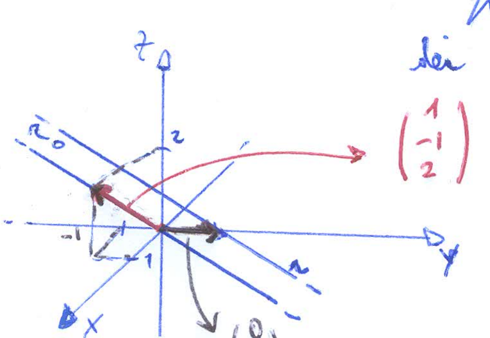
$$\begin{cases} y = 3-x \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -s+3 \\ z = 2\cdot s \end{cases}$$

da qui possiamo scrivere l'eq. vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

parametri direttori, coordinate dei vettori di base.



$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ = VETTORE DELLA TRASLAZIONE

→ quando 3 punti sono allineati? P, Q, R

TROVO retta per P e Q → verifico che R ∈ retta

$$x = s\,(V_Q - V_P) + V_P \qquad (\text{eq. in } \mathbb{R}^2, \text{ vale in } \mathbb{R}^3)$$

da qui si può passare alla cartesiana.

$$* \quad x = s\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -2s + 1 \\ y = -2s + 2 \\ z = -s + 3 \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICA

$$\boxed{\begin{array}{l} * \text{ prendo:} \\ P\,(1;2;3) \\ Q\,(-1;0;2) \\ R\,(-1;-1;-1) \end{array}}$$

EQ. CARTESIANA

$$\begin{cases} x = +2z - 5 \\ y = 2z - 4 \end{cases}$$

$$s = -z + 3$$