In $\mathbb{R}^n$ euclideo $\exists$ una base ortonormale $B_{\perp n}$ rispetto alla quale la matrice $[T]_{B_{\perp n}}$ di un operatore T isometrico è così fatta:

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix}M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k\end{matrix} \end{pmatrix} \quad \text{con } M_j = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \quad \forall j = 1 \dots k$$

Per capire come sono fatte queste matrici E COSA RAPPRESENTANO, al variare di $A = [T]_e$ iniziale, si classificano le matrici finali che sono simili alle infinite di partenza. VEDIAMO LE POSSIBILI MATRICI ASSOCIATE IN $B_{\perp n}$ AD Operatori isometrici in $\mathbb{R}^3$

· Classificazione di tali matrici 3x3

$$A_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

Per discernere l'operatore isometrico bisogna ricondurci alle matrici sopra riportate. NB: sono tutte ortogonali ($A^{-1} = A^T$)

$A_1 = I = id$;

determinanti

$|A_1| = +1$; $|A_2| = -1$; $|A_3| = +1$; $|A_4| = -1$ $|A_5| = +1$ $|A_6| = -1$

A_1, A_2, A_3, A_4 sono simmetriche (diagonali)

se sono diagonali $\Rightarrow$ sono SIMILI a matrici diagonalizzabile

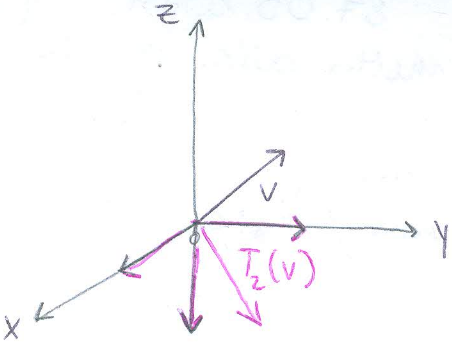
A_5 e A_6 sono diagonalizzabili in $\mathbb{R}$? cerco il polinomio caratt.

$$|A_5 - \lambda I| = (1-\lambda)\left[(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha\right] = (1-\lambda)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha)$$

$$(1-\lambda)(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha) = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha = 0$$

$\lambda = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \rightarrow$ sempre < 0 $\Rightarrow$ l'unico autovalore reale è per $\lambda = 1$; analogamente per A_6 l'unico $\lambda \in \mathbb{R}$ è $\lambda = -1$

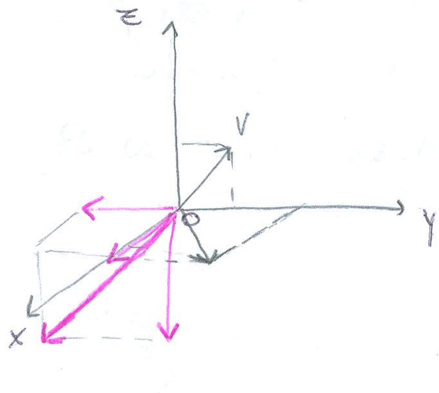
$\Rightarrow$ A_5 e A_6 non sono diagonalizzabile immagine di A_2



$$A_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\-z\end{pmatrix}$$ SIMMETRIA RISPETTO AD UN PIANO ($z=0$)

se $z=0$ → tutti i vettori vengono mandati in se stessi

= simmetria (ribaltamento / specchiamento) rispetto al piano $z=0$



$$A_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y\\-z\end{pmatrix}$$ se $v = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$ $T_3 v = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$ INVARIANTE!

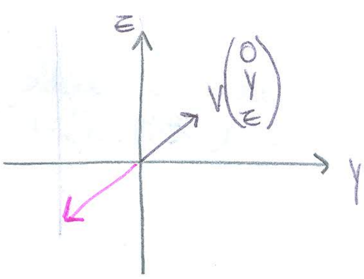
rimane su x ⊛

se $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow T_3 v = \begin{pmatrix}x\\-y\\-z\end{pmatrix}$

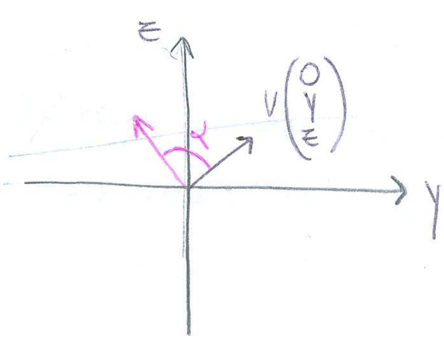
NB: la norma (ovvero la lunghezza) non cambia!

⊛ asse x è un sottospazio invariante

se considero vettori che hanno $x = 0$ essi vengono mandati in $\begin{pmatrix}0\\-y\\-z\end{pmatrix}$ = ROTAZIONE di π nel piano yz



A_5 ~~esprime~~ ~~ammette~~ ha l'asse x come sottospazio invariante (infatti il primo vettore è $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$); tutti i vettori che stanno nel piano $x=0$ sono ruotati di un certo α rispetto all'origine

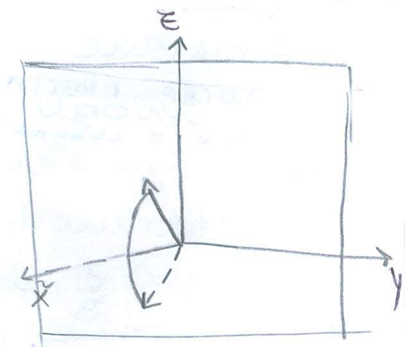


→ Tutto lo spazio ruota intorno alla retta* t.c. il vettore compia una rotazione di un angolo α intorno alla retta $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ *

le rotazioni avvengono in piani // all'asse invariante

→ tutte le matrici ~~caso~~ con det = +1 sono matrici di rotazione (A_1, A_3, A_5) : tutto lo spazio ruota attorno ad una retta (sottospazio invariante per T di dim = 1) e ∞ piani di rotazione ∥ ad un sottospazio vettoriale con dim = 2 che è ⊥ all'asse di rotazione

⇒ trovare il piano di rotazione significa dare la direzione del fascio di piani di rotazione ~~.........~~. Ne ho infiniti → la direzione li definisce tutti. Se voglio definire la rotazione devo definire l'angolo di rotazione nel piano; devo inoltre definire il verso (positivo o negativo) di rotazione di rotazione ⇒ Per definire l'operatore V = DOBBIAMO DEFINIRE:



1) definire asse;
2) definire angolo;
3) definire verso;
4) definire il piano.

— o —

Considerando le matrici con det = -1, si nota che, avendo det = -1 ~~esse~~ queste non possono essere rotazioni pure. ES. trovare due matrici che moltiplicate diano A_6

$A_6 = A_5 \cdot A_2$ dove A_2 deve presentare simmetria rispetto ad $x = 0$.

Dal punto di vista degli operatori V A_6 RAPPRESENTA una composizione:

è la composizione di simmetria ~~e rotazione~~ rispetto ad un piano CON UNA ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE

PERTANTO ⇒ abbiamo solo due tipi di operatori isometrici in $\mathbb{R}^3$

rotazione intorno ad una retta;

ribaltamento rispetto ad un piano.

Gli altri sono composizioni dei sopracitati.

siccome il det è un invariante di similitudine so che la matrice è di rotazione SE IL DETERMINANTE È +1

se det = -1: se la matrice è diagonalizzabile e simmetrica (simmetrica ⇒ diagonalizzabile) è una simmetria rispetto ad un piano.

Se non è simmetrica ⇒ non diagonalizzabile ⇒ riconduco ad A_6, COMPOSIZIONE DI SIMMETRIA E ROTAZIONE

ESEMPIO :

· STUDIARE UN OPERATORE ISOMETRICO A PARTIRE DA UNA MATRICE

studiare l'operatore associato ad (NELLA BASE CANONICA) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & +1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. PERCHÈ I VETTORI RIGA E COLONNA SIANO normalizzati devo moltiplicare per $\frac{1}{3}$ dove 3 è la norma.

$$A \cdot A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & +1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow A \text{ È ORTOGONALE}$$

⇒ alla matrice ortogonale A

→ associo un operatore isometrico in $\mathbb{R}^3$

det A = +1 · E A non simmetrica ⇒ A è associato ad una rotazione pura nello spazio $\mathbb{R}^3$.

definire la rotazione (SIGNIFICA) dare gli elementi caratteristici:

→ asse di rotazione; (I)

→ piano di rotazione; (II)

→ angolo di rotazione; (III)

→ verso di rotazione. (IV)

Per il teorema di struttura so che esiste una $B_{\perp n}$ t.c.

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha = \text{angolo di rotazione}$$

sottospazio invariante

→ dare la matrice simile ad A in $B_{\perp n}$; (V)

→ dare la base rispetto a cui ho quella matrice. (VI)

(i) asse di rotazione: cerco una retta data dai vettori che non variano con la rotazione

→ asse di rotazione è il sottospazio invariante di T; ovvero l'autospazio relativo all'autovalore $\boxed{\lambda=+1}$

cerco dunque E_1 →
$$\begin{pmatrix} 2/3-1 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3-1 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2$ per avere una retta; risolvo il sistema e ottengo

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -\cancel{2}x-\cancel{2}y+\cancel{2}z=0 \end{cases} \quad \text{ASSE DI ROTAZIONE} \quad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

(ii) piano di rotazione: $\pi \perp$ alla retta trovata passante per l'origine; considero un vettore di base dell'asse $\left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$

$x+z=0$ è la direzione del fascio $\perp$ all'asse.

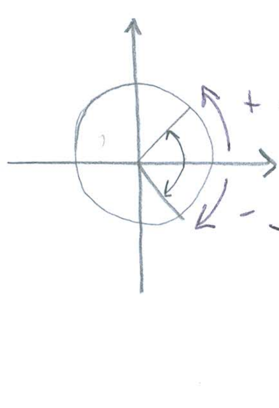
(gli altri li trovo facendo variare d)

(iii) angolo; per trovarlo sfrutto la Traccia = somma elementi sulla diagonale, anch'essa è un invariante

$Tr\,A = 5/3 = 1+2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{3}$

gli archi NELL'ANGOLO GIRO ~~che hanno~~ $\cos = \frac{1}{3}$ sono due; devo considerare il verso di rotazione

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{9}}$



$+ \rightarrow \sin\alpha = +\sqrt{8/9}$

$- \rightarrow \sin\alpha = -\sqrt{8/9}$