25/03/2019

$A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(K) \Rightarrow A \sim_c B \iff \exists\, S \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ INVERTIBILE | $B = S^T A S$

$\exists$ 2 matrici di rango uguale non congruenti?

$K = \mathbb{R} \quad n = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ INVERTIBILE

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow s_{11} \cdot s_{22} - s_{12} \cdot s_{21} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

$$S^T \cdot A = \begin{pmatrix} s_{11} + 3 s_{21} & 2 s_{11} + 4 s_{21} \\ s_{12} + 3 s_{22} & 2 s_{12} + 4 s_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow [S^T \cdot A] \cdot S = \cancel{\Big(s_{11}(s_{11} + 3 s_{21}) + s_{12}(2 s_{11} + 4 s_{21})}$$

$$\Rightarrow [S^T \cdot A] \cdot S = \begin{pmatrix} s_{11}(s_{11} + 3 s_{21}) + s_{22}(2 s_{11} + 4 s_{21}) & s_{12}(s_{11} + 3 s_{21}) + s_{22}(2 s_{11} + 4 s_{21}) \\ s_{11}(s_{12} + 3 s_{22}) + s_{21}(2 s_{12} + 4 s_{22}) & s_{12}(s_{12} + 3 s_{22}) + s_{22}(2 s_{12} + 4 s_{22}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_{11}^2 + 3 s_{11} s_{21} + 2 s_{11} s_{22} + 4 s_{22} s_{21} = 0 \\ s_{11} s_{12} + 3 s_{12} s_{21} + 2 s_{11} s_{22} + 4 s_{21} s_{22} = 1 \\ s_{12}^2 + 3 s_{12} s_{22} + 2 s_{12} s_{22} + 4 s_{22}^2 = 0 \\ s_{11} s_{12} + 3 s_{11} s_{22} + 2 s_{12} s_{21} + 4 s_{21} s_{22} = 1 \end{cases} \qquad \ldots$$

[RISOLVERE IL SISTEMA NELLE s_{ij}, SE POSSIBILE $\Rightarrow$ ... FARE PER CASA]

SE DUE MATRICI A, B SONO CONGRUENTI $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |B| = |S^T A S| = |S|^2 |A| :$$

$\Longrightarrow$ [RICORDO CHE SE LE DUE MATRICI SONO CONGRUENTI $\Rightarrow$ IL DETERMINANTE HA LO STESSO SEGNO PER ENTRAMBE]

CONTROESEMPIO:

$\Rightarrow$ PRENDO DUE MATRICI A e $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ CON

$\det(B) = -1$, $\det(A) = +2$.

$\Downarrow$

CIOÈ COME CONTROESEMPIO

$\Downarrow$

PRENDO DUE MATRICI DAL DETERMINANTE DI SEGNO OPPOSTO

$\Rightarrow$ QUESTE DUE MATRICI NON POSSONO ESSERE CONGRUENTI!

AD ESEMPIO $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ CON $|A| = 2$ e $|B| = -1$.

DEFINIZIONE:

SIA F UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\dim V = n)$

$\Rightarrow$ DUE VETTORI $v, w \in V$ SONO DETTI F-CONIUGATI o F-ORTOGONALI SE $F((v, w)) = 0$

OSSERVAZIONE: OGNI VETTORE $v \in V$ È F-ORTOGONALE A $w = 0$ $\Rightarrow$ CERCHEREMO VETTORI F-CONIUGATI NON NULLI.

OSSERVAZIONE: SIANO $v_1, \dots, v_k$ VETTORI F-CONIUGATI AL VETTORE w

$\Rightarrow$ OGNI VETTORE DEL SOTTOSPAZIO $\langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$ È F-ORTOGONALE A w. (DA DIMOSTRARE)

DEFINIZIONE:

LO SPAZIO DI TUTTI I VETTORI F-CONIUGATI AL VETTORE w SI INDICA CON $w^\perp$ E SI CHIAMA SPAZIO (O COMPLEMENTO) F ORTOGONALE DI w.

DEFINIZIONE

DATO IL SOTTOSPAZIO $U < V$ $\Rightarrow$ L'INSIEME DEI VETTORI F-CONIUGATI A TUTTI I VETTORI DI U È UN SOTTOSPAZIO DETTO COMPLEMENTO F ORTOGONALE DI U, E INDICATO CON $U^\perp$

ESEMPIO (1)

DIAMO $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{v_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{v_2}\Big) \longmapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$$

TROVARE I VETTORI DI $\mathbb{R}^2$ F-CONIUGATI AL VETTORE $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

F deve essere 1) forma bilineare, 2) simmetrica: 1) È FORMA BILINEARE PERCHÈ È ESPRESSA MEDIANTE UN POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO DUE NELLE COORDINATE DEI DUE VETTORI GENERICI DELLA COPPIA;

2) $F((v_1, v_2)) = \underline{x_1 y_2 + x_2 y_1}$; e $F((v_2; v_1)) = F\Big(\Big(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Big)\Big) = \underline{y_1 x_2 + y_2 x_1}$

$\Rightarrow$ LA FORMA BILINEARE È SIMMETRICA; POSSIAMO ANCHE STUDIARE LA MATRICE AD ESSA ASSOCIATA IN UNA BASE QUALUNQUE: PREND

$B_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{E} \Rightarrow [F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F((e_1; e_1)) & F((e_1; e_2)) \\ F((e_2; e_1)) & F((e_2; e_2)) \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = F\Big(\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big)\Big) = 1$

$a_{21} = F\Big(\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big)\Big) = 1$

LA MATRICE $\Rightarrow$ È SIMMETRICA

CERCO I VETTORI $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; F\Big(\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\Big)\Big) = 0$

$-2x_1 + 3x_2 = 0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}^{\perp}$

QUINDI IL COMPLEMENTO F-ORTOGONALE DI $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ È RETTA DI $\mathbb{R}^2$

DATA LA RETTA $\mathcal{U}: x_1 + x_2 = 0$ (SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$) CERCO $\mathcal{U}^{\perp}$ COMPLEMENTO $F^{\perp}$-ORTOGONALE DI $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U}^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid F((v, u)) = 0 \;\; \forall u \in \mathcal{U} \} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid F((v, \alpha u_1)) = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 F((v, u_1)) = 0 \;\; \forall \alpha_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \{u_1\} \text{ BASE DI } \mathcal{U} \} \Rightarrow$$

CERCO UN VETTORE DI BASE DI $\mathcal{U}$: $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\alpha F\Big(\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\Big)\Big) = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow F\Big(\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\Big)\Big) = 0 \Rightarrow \boxed{-x_1 + x_2 = 0} = \mathcal{U}^{\perp}$

ESEMPIO 2:

DIAMO $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \to x_1 y_2 + x_2 y_1$$

VERIFICO LA SIMMETRIA:

$$F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = y_1 x_2 + y_2 x_1$$ $\Rightarrow$ LA FORMA BILINEARE È SIMMETRICA

DO $U = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (PIANO) $\Rightarrow$ CERCO $U^\perp$:

$$U^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid F((v; u)) = 0 \ \forall u \in U \right\}$$

È SUFFICIENTE CERCARE UNA BASE DI $U = \{u_1; u_2\}$ e

$$\Rightarrow U^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid F((v; u_1)) = 0; F((v; u_2)) = 0 \right\}$$

B_U : $x_3 = -x_1 - x_2$ $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è BASE DI U

$$U^\perp = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 3:

DIAMO $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

è forma bilineare simmetrica

DETTA: PRODOTTO SCALARE STANDARD

DEFINIZIONE:

1) UNA BASE B_V DI UNO SPAZIO VETTORIALE V È DETTA F-ORTOGONALE SE I VETTORI DI TALE BASE SONO F-CONIUGATI DOVE $F: V \times V \to \mathbb{R}$ È FORMA BILINEARE SIMMETRICA.

2) B_V È DETTA F-ORTONORMALE SE È F-ORTOGONALE E SE DETTI $v_1, \dots, v_n$ I VETTORI DI B_V, $F((v_i; v_i)) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$

SE B_V È F-ORTOGONALE $\Rightarrow [F]_{B_V} = D$;

SE B_V È F-ORTONORMALE $\Rightarrow [F]_{B_V} = I$

DEFINIZIONE

F FORMA BILINEARE SIMMETRICA, UN VETTORE $v \in V$, $v \neq 0$ È DETTO ISOTROPO SE $F((v,v)) = 0$

DOMANDA:

SE F È IL PRODOTTO SCALARE STANDARD DI $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$

$\exists$ VETTORI F-ISOTROPI?