25/02/2019

Sia $T: V \to V$ V spazio vettoriale n dimensionale su un campo K.

DEFINIZIONE di Sottospazio <u>INVARIANTE</u>

: $U \leq V$ è detto invariante per T se $T(u) \in U$ $\forall u \in U$. (cioè l'immagine dei vettori di U sta ancora dentro U $\Rightarrow$ cioè $T(U) \subseteq U$.

OSSERVAZIONI: $\boxed{\text{BANALE}}$

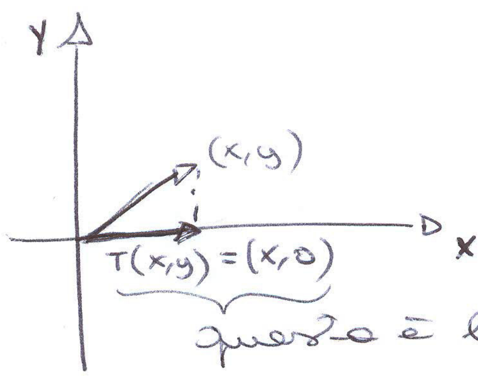
Se $U = \{0\} \Rightarrow T(0) = 0$ $\forall T \Rightarrow \{0\}$ è sottospazio invariante PER OGNI T.

Anche V è sottospazio invariante banale

Dunque quando li cerchiamo, cerchiamo quelli non BANALI.

Esempio: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (x,0)$$



questo è la nostra applicazione. VISTA GEOMETRICA

$\exists$ <u>sottospazi</u> invarianti non banali per T?

Quindi in questo caso ci dobbiamo chiedere se esistono rette che vengono rimandate in se stesse.

la retta $y=0$ è invariante.

Ce ne sono altri? Altre rette passanti per l'origine la cui immagine è contenuta nell'asse delle x?

POICHE' $\forall y$ $T(0,y) = (0,0)$ $\Rightarrow$ l'immagine dell'asse y sta dentro l'asse x, dunque anche la retta $x=0$ è invariante.

→ PROPRIETÀ

~~PROPOSIZIONE~~: Se $T: V \to V$ è isomorfismo $\Rightarrow$

$U < V$ invariante per T è anche invariante per T^{-1}

(DIMOSTRAZIONE DA FARE PER CASA)

PROBLEMA: Sia $T: V \to V$ e supponiamo di ~~...~~ dare in V una base $B_V = \{v_1, \dots v_n\}$ i cui primi k vettori fanno parte ad un sottospazio U invariante per T. Caratterizzare la matrice associata $[T]^{B_V}_{B_V}$ (FARE PER CASA)

Consideriamo ora particolari sottospazi invarianti per T; consideriamo ad esempio, l'insieme dei vettori $v \in V$

$v \neq 0$ tc $\exists \lambda \in K$ (scalare) $\mid T(v) = \lambda v$

Tale scalare λ è detto AUTOVALORE di T, i vettori v (tali che $T(v) = \lambda v$) sono detti AUTOVETTORI di T e l'insieme di tali AUTOVETTORI è detto AUTOSPAZIO relativo all'autovalore λ e sarà indicato con E_λ

OSSERVAZIONE: $E_\lambda \cup \{0\}$: $v=0$. lo avevamo tolto poiché è autovettore per ogni ~~...~~ autovalore; per questo nella definizione stessa di autovettore togliamo $v=0$. SI DIMOSTRA CHE $E_\lambda \cup \{0\}$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE ed è INVARIANTE per T.

DIMOSTRAZIONE

$E_\lambda \cup \{0\}$ è un sottospazio vettoriale ~~...~~ perché dati $v_1, v_2 \in E_\lambda \cup \{0\} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in E_\lambda \cup \{0\}$

So che $T(v_1) = \lambda v_1$ e $T(v_2) = \lambda v_2$, (ANCHE PER v_1 O v_2 nulli)

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \lambda v_2 = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in E_\lambda \cup \{0\}$ CHE DUNQUE È SOTTOSPAZIO!

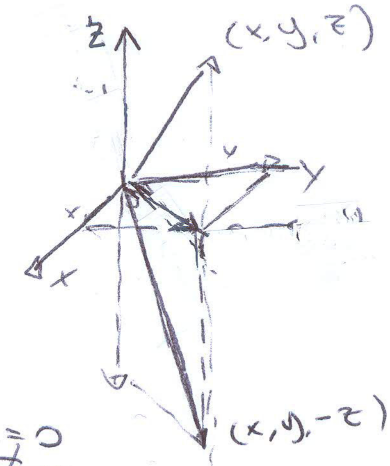
$\{0\} \cup E_\lambda$ è INVARIANTE per T: segue direttamente dall'aver dimostrato che $E_\lambda \cup \{0\}$ è sottospazio di V.

c.v.d.

Vale il contrario? VEDIAMO UN ESEMPIO!

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \to (x, y, -z)$

operatore che riflette
$\to$ tutto rispetto AL PIANO $z=0$



Cerchiamo i sottospazi NON banali invarianti. Troviamo i vettori di coordinate $(x, y, 0)$ cioè

$$T((x, y, 0)) = (x, y, 0)$$

pertanto tutte le rette per O in $z=0$ sono invarianti.

Il piano $z=0$ è invariante: ogni vettore $v \in \pi$ è tale che $T(v) = v \Rightarrow \exists\ \boxed{\lambda = 1}$ tali che $T(v) = \lambda v$
$= 1 v$

$\Rightarrow \pi$ è AUTOSPAZIO relativo a $\lambda = 1$ con $\pi = E_1$

Ci sono altri sottospazi invarianti?

Prendiamo $\pi_1 : x = 0$

Se $v \in \pi_1 \Rightarrow v = (0, y, z) \to$
$T(v) = (0, y, -z) \in \pi_1$?

$\boxed{\text{Sì}}$ è un sottospazio invariante per T.

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \mid T(v) = \lambda v \quad \forall v \in \pi_1$?

$$T((0, y, z)) = (0, \lambda y, \lambda z)$$
$$\shortparallel$$
$$(0, y, -z)$$

ma dato da

allora $\boxed{\text{NO}}$! non $\exists\ \lambda$ AUTOVALORE relativo a π_1.

$\Rightarrow$ non è vero che tutti i sottospazi invarianti sono autospazi.

c.v.d.

PROPRIETÀ:

PROPOSIZIONE: ogni autovettore è relativo ad un unico autovalore e ogni autovalore è relativo ad infiniti autovettori (è E_λ: è UN SOTTOSPAZIO!)

~~Dim~~ DIMOSTRAZIONE della prima:

Sia v un'autovettore per T per ASSURDO supponiamo $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tali che $T(v) = \lambda_1 v$ e

$T(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \quad (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$

$\Rightarrow$ poiché $v \neq 0$ per ipotesi $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ non è vero. ASSURDO

Ogni autovettore corrisponde ad un unico autovalore

Proposizione: Autovettori che sono relativi ad autovalori diversi sono linearmente INDIPENDENTI.

Dim: per induzione sul numero k di autovettori:

1) PER $k=1$ VERO BANALMENTE

1) verifica per $k=2$: siano v_1 e $v_2 \in V \mid T(v_1) = \lambda_1(v_2) = \lambda_2 v_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (lo avevamo messo nell'ipotesi)

Pongo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow$ sfruttiamo l'operatore che abbiamo

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(0) = 0$ [ora siamo nel codominio, prima eravamo nel dominio

$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0 \Rightarrow$ (VI INVITO A CONTINUARE LA DIMOSTRAZIONE DOPO AVER GUARDATO COME FARE

$\Rightarrow$ ~~reficer~~ come nel caso generale.) ....

CASO GENERALE:

Supponiamo la proposizione vera per k vettori e dimostriamola per $k+1$ vettori: $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$

con $T(v_j) = \lambda_j v_j$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall\, i \neq j$. Considero

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j v_j = 0 \quad (*)$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE QUESTI α_j SONO NULLI!

$$\Rightarrow T\left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j v_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j T(v_j) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 \ldots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

$\Rightarrow$ Supposto $\lambda_{k+1} \neq 0$ moltiplico λ_{k+1} LA SOMMATORIA $(*)$

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} v_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$\alpha_1 v_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) + \alpha_2 v_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2) + \ldots + \alpha_k v_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0$$

Per ipotesi induttiva $v_1 \ldots v_k$ sono lin. indipendenti

$\Rightarrow \alpha_j(\lambda_{k+1} - \lambda_j) = 0 \ \forall j = 1, \ldots, k$

$\Rightarrow$ essendo $\lambda_k - \lambda_j \neq 0 \Rightarrow$ necessariamente $\alpha_j = 0 \ \forall j = 1 \ldots k$ poiché siamo in un campo.

Allora la sommatoria ~~[illegible]~~: $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j v_j = 0$ si riduce $\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$

essendo $v_{k+1} \neq 0$ perché autovettore $\Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$

CVD

[Se rifai tutto ciò per due vettori si arriva alla conclusione del discorso precedente]

OSSERVAZIONI:

① $\dim E_\lambda$ è sempre ≥ 1

② Gli autospazi relativi ad autovalori diversi sono in SOMMA DIRETTA (cioè $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$) (FARE PER ESERCIZIO)

Mentre prima li abbiamo cercati (FRA I SOTTOSPAZI INVARIANTI)... in realtà c'è un metodo più automatico per cercare degli autospazi di un operatore $T: V \to V$, $\dim V = n$

Cerco gli autovettori di T cioè i vettori NON NULLI, $v \neq 0$, tali che $T(v) = \lambda v \Rightarrow$

$$T(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow T(v) - \lambda\, id(v) = 0 \Rightarrow (T - \lambda\, id)(v) = 0$$

$\Rightarrow$ cerco v tale che $v \in \operatorname{Ker}(T - \lambda\, id)$

So come fare! passo alle matrici!

Fissiamo una base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e consideriamo: sia

$A = [T]^{B_V}_{B_V}$ e $[id]^{B_V}_{B_V} = I$ (PERCHÉ LA BASE È LA STESSA!)

$\Rightarrow [T - \lambda\, id]^{B_V}_{B_V} = A - \lambda I$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(T - \lambda\, id) = \operatorname{Sol}((A - \lambda\, id)X = 0)$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

è uguale allo spazio delle soluzioni.

Però io non solo cerco le sol ma devo cercare ~~....~~ le sol NON NULLE di questo sistema lineare con N equazioni in N incognite.

Tale sistema ha soluzioni non nulle se il rg <u>NON</u> è massimo - quindi il det $|A-\lambda I|=0$

$|\ddot{A}-\lambda I|$

(Polinomio caratteristico)

Gli autovalori di T sono le radici caratteristiche di $\left|[T]^{\mathcal{B}V}_{\mathcal{B}V}-\lambda I\right|=0$

Sappiamo che possiamo prendere una qualunque matrice perché tra loro sono simili e abbiamo già dimostrato che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

La ~~mass~~ molteplicità algebrica (DELLA RADICE CARATTERISTICA) è detta molteplicità algebrica dell'autovalore

Prendiamo ogni radice caratteristica, risolviamo il sistema e troviamo $Sol\,\Sigma_0$, trovando l'autospazio

L'autospazio relativo a λ_0, E_{λ_0}, è ... $E_{\lambda_0} =$

$= Sol\left(\left([T]^{\mathcal{B}V}_{\mathcal{B}V}-\lambda_0 I\right)X=0\right)$; dim E_{λ_0} è la <u>molteplicità</u> <u>geometrica di λ_0</u>

Si dimostra che la molteplicità geometrica è <u>SEMPRE</u> $<$ o al massimo $= \mu(\lambda_0)$

$\Rightarrow \dim E_{\lambda_0} \leq \mu(\lambda_0)$