FINIAMO DI ESAMINARE COME AGISCONO SUL DETERMINATE LE OPERAZIONI RIGA.

Sia "e" l'operazione elementare "sostituzione di una riga R_i con la somma di $R_i + R_j$. Vediamo come cambia il determinante di una matrice $A \in M_{m \times m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \Rightarrow e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{i1} + a_{j1} & \cdots & a_{in} + a_{jm} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

PER QUANTO DIMOSTRATO PRECEDENTEMENTE, SI HA:

$$|e(A)| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}}_{|A|} \leftarrow \text{RIGA } i\text{-ESIMA} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}}_{0} \leftarrow \text{RIGA } i\text{-ESIMA} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|e(A)| = |A|}$$

Tale operazione è detta DETERMINANTALE POICHÈ NON CAMBIA IL DETERMINANTE.

2) Se "e" è l'operazione elementare "sostituzione di una riga R_1 con la combinazione lineare $\alpha R_i + \beta R_j$", $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cambia il determinante di una matrice $A \in M_{m \times m}$?

$$|e(A)| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{im} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}}_{\alpha |A|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \beta a_{j1} & \cdots & \beta a_{jm} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}}_{\beta |A'| = 0}$$

$$\Rightarrow |e(A)| = \alpha |A| \Rightarrow \text{IN CONCLUSIONE:}$$

"e" è l'operazione riga determinantale se sostituisco la riga R_i con la combinazione lineare $\boxed{R_i + \beta R_j, \ \forall \beta \in \mathbb{R}}$. TUTTO CIÒ PUÒ ESSERE APPLICATO

SE DOBBIAMO CALCOLARE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE, POSSIAMO CALCOLARE IL DETERMINATE DELLA MATRICE RIDOTTA A GRADINI MEDIANTE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA DETERMINANTALI. ■

Sia Σ_0 (sistema lineare omogeneo) di n variabili e p equazioni: $\Sigma_0 : A \cdot X = 0$

con $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$

$$\underbrace{X}_{\text{vettore variabili}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \qquad \underbrace{0}_{\text{vettore colonna}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{p \times 1}$$

<u>ESEMPIO</u>: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$ ■

VEDIAMO COME SCRIVERE UN SISTEMA COME COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI UGUAGLIATA AL VETTORE DEI TERMINI NOTI

IL SISTEMA SCALARE $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ CI DÀ L'UGUAGLIANZA MATRICIALE $\begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underbrace{x_1 + x_2 - x_3}_{=a_{11}} \\ \underbrace{0 + x_2 + 0}_{=a_{21}} \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matrice I° membro

matrice II° membro

PER LA DEFINIZIONE DI ADDIZIONE TRA MATRICI

(DEFINIZIONE DI MOLTIPLICAZIONE DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE)

$$\Rightarrow \underbrace{x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

vettori colonna della MATRICE A MOLTIPLICATI PER x_i $\Rightarrow$ è una combinazione lineare dei vettori colonna di A, eguagliati a tale CHE IN QUESTO CASO È IL VETTORE COLONNA DEI TERMINI NOTI

ESEMPIO:

$$\underbrace{\Sigma}_{\text{sistema non omogeneo}}:\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Sistema scalato ~~xxxx~~ ~~xxxx~~

Visto come:

1) eq. matriciale: $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

2) Combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Sia $\Sigma_0 : AX = O$ con $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$,

$X \in M_{n \times 1}$, $O \in M_{p \times 1}(\mathbb{R})$

Ha soluzione un sistema di questo tipo?
Sempre, perché esiste almeno la soluzione NULLA, cioè $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = O$

Se $\exists$ una soluzione $\neq$ da O, che chiamiamo V, $V \neq 0 \Rightarrow$ ne ho ∞ perché ad esempio $\alpha V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, è ancora soluzione del sistema

DIMOSTRAZIONE:

Se $\exists$ una soluzione $\neq$ da O, chiamata V, $V \neq 0$

$$A \cdot V = 0 \Rightarrow A \cdot (\alpha \cdot V) = ?$$

posto $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha V = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} = A \cdot \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \underbrace{A \cdot V}_{= 0} = \alpha \cdot 0 = 0$$

C.V.D.

ESEMPIO: $\Sigma_0 : x_1 + x_2 = 0$ $\qquad \Sigma_0 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{2\times 1} = (0)_{1\times 1}$

$$\underbrace{x_1}_{\text{variabile LEGATA}} = - \underbrace{x_2}_{\text{variabile LIBERA}}$$

x_1	x_2
-1	1
$-a$	a

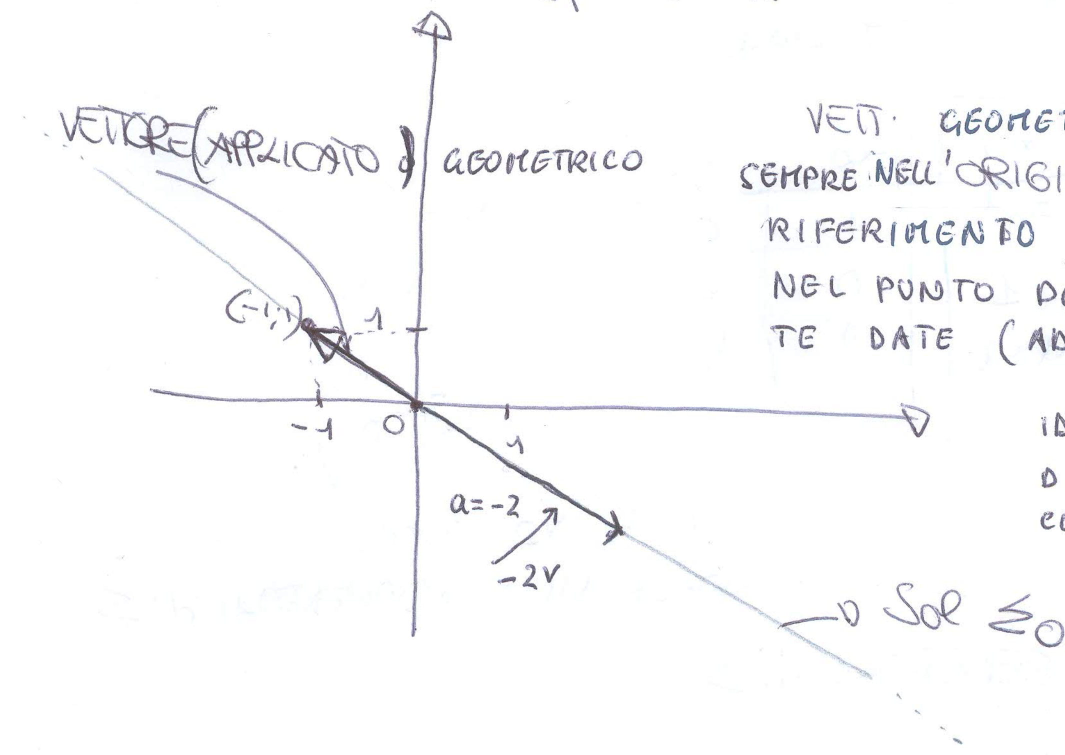
$V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è detta soluzione FONDAMENTALE del sistema

$V = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$ è detta soluzione GENERALE del sistema

$$\Rightarrow Sol\ \Sigma_0 = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a(-1, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Rappresentiamo nello spazio $\mathbb{R}^2$



VETT. GEOMETRICO: UN ESTREMO È SEMPRE NELL'ORIGINE O DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, L'ALTRO ESTREMO NEL PUNTO DELLO SPAZIO DI COORDINATE DATE (AD. ESEMPIO $(-1,1)$):

IDENTIFICHIAMO IL PUNTO DELLO SPAZIO DI COORDINATE $(-1,1)$ CON IL VETTORE $V=(-1,1)$

un sistema (DI p EQUAZIONI ED n INCOGNITE, OMOGENEO) per avere una sola soluzione, che è quella nulla, deve avere RANGO = n

ESEMPIO:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad rg\, \Sigma_0 = rg\, A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = 2 \Rightarrow$ Sol Σ_0 ha ∞^{2-2} soluzioni.
Dunque 1 sol.

2. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

È SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI 1 EQUAZIONE IN 3 INCOGNITE

in forma matriciale: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$rg\, \Sigma_0 = rg\, A = 1$

Σ_0 ha ∞^{3-1} soluzioni cioè ∞^2 soluzioni

$\underset{\text{V. LEGATA}}{x_1} = \underbrace{-x_2 + x_3}_{\text{V. LIBERE}}$

x_1	x_2	x_3
-1	1	0
1	0	1
$-a+b$	a	b

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

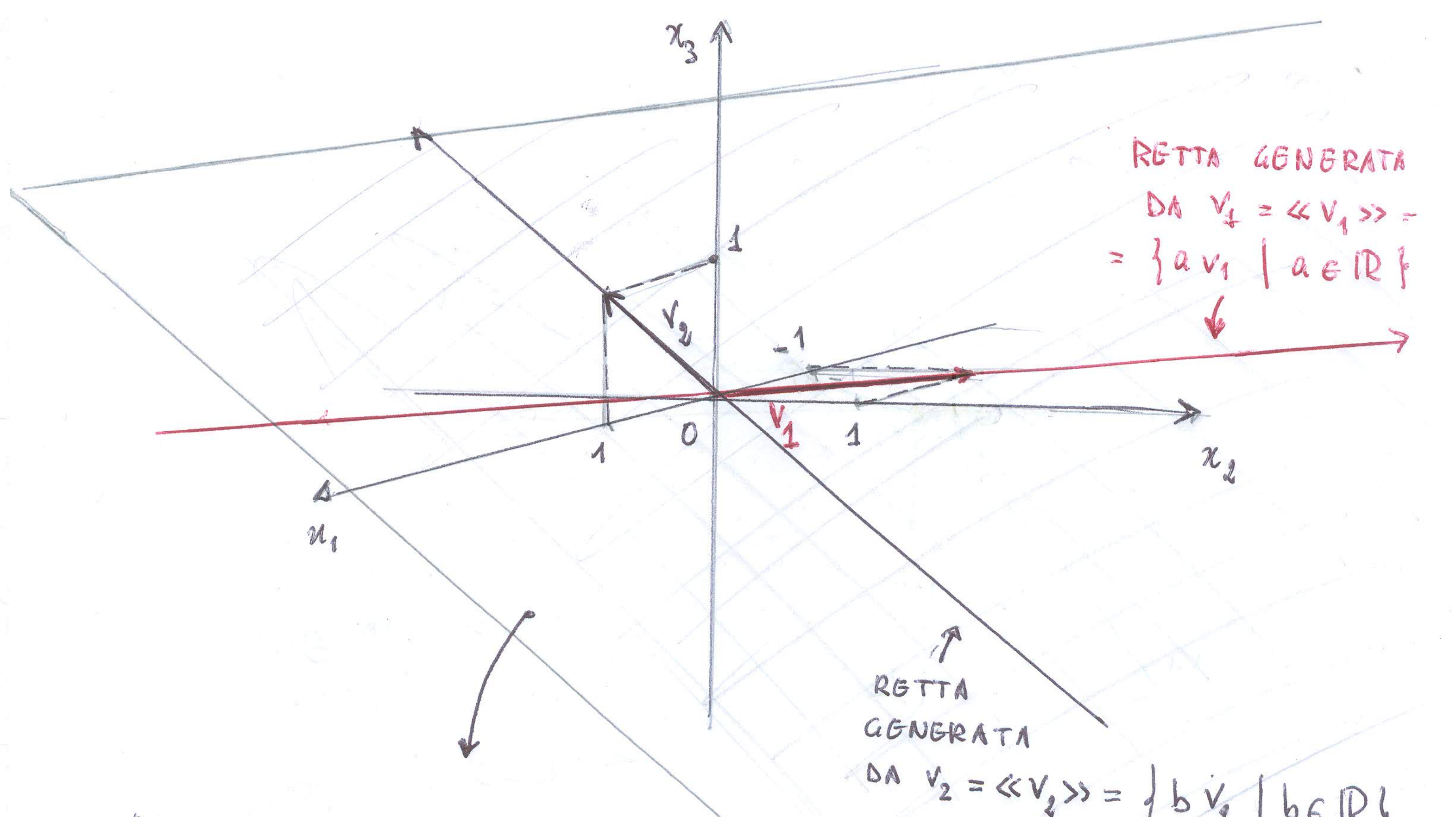
v_1 e v_2 sono SOLUZIONI FONDAMENTALI di Σ_0

$\begin{pmatrix} -a+b \\ a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$ SOL. GENERALE di Σ_0

$$\begin{pmatrix} -a+b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Sol\,\Sigma_0 = \left\{ a\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_2} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

Disegnamo tale insieme! $Sol\,\Sigma_0 = \{ a v_1 + b v_2 \mid a,b \in \mathbb{R} \}$



PIANO GENERATO DA v_1 e v_2

$= \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = \{ a v_1 + b v_2 \mid a,b \in \mathbb{R} \} =$

$= Sol\,\Sigma_0$