APPLICAZIONI LINEARI CHE VIVONO NEGLI SPAZI EUCLIDEI

20/05/20

OPERATORI

Dato un operatore $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, euclidei, si definisce OPERATORE AGGIUNTO di T, l'operatore $T^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$T(u)\cdot v = u \cdot T^*(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

→ OPERATORI PARTICOLARI:

1) SIMMETRICO: l'operatore (~~invertibile~~) T tale che $T^* = T$
2) ISOMETRICO: " INVERTIBILE T tale che $T^* = T^{-1}$

(SE $T^* = T$ L'OPERATORE È DETTO autoaggiunto

→ = NON CAMBIA LA METRICA

→ operatore ISOMETRICO

UN OPERATORE T È DETTO ISOMETRICO

definizione: se è invertibile e $T(u)\cdot v = T^{-1}(v)\cdot u \quad \forall u, v \in$

Proposizione: l'operatore isometrico T mantiene a) la distanza tra punti dello spazio $\mathbb{R}^n$; b) la lunghezza dei vettori; c) la misura dell'angolo ~~dei~~ tra vettori

Dimostrazione:

b) $$\|T(u)\|^2 = T(u)\cdot T(u) = u\, T^{-1}(T(u)) = u\cdot u$$

$$\|T(u)\|^2 = \|u\|^2$$

Inoltre: $T(u)\cdot T(v) = u\cdot v$: INFATTI: $T(u)\cdot T(v) = u\cdot T^{-1}(T(v)) = u\cdot v$
$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

→ Dati i punti P e Q di $\mathbb{R}^n$ → a) $d(T(P), T(Q)) = \sqrt{T(V_Q - V_P)\cdot T(V_Q - V_P)}$

$$= \sqrt{(V_Q - V_P)\cdot(V_Q - V_P)} = d(P, Q)$$

Posto che se α e l'angolo ha i vettori v e u

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Posto β l'angolo tra i trasformati $T(u)$ e $T(v)$

$$\stackrel{c)}{\Rightarrow} \cos\beta = \frac{T(u) \cdot T(v)}{\|T(u)\| \cdot \|T(v)\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\alpha$$

Proposizione:

1) Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è operatore isometrico
$\Rightarrow T^{-1}$ è un operatore isometrico

2) Se $U < \mathbb{R}^n$ è un sottospazio invariante per T
$\Rightarrow U$ è sottosp. invariante per T^{-1}

DIMOSTRAZIONE: DA FARE PER ESERCIZIO

Proposizione: Se U è sottospazio invariante per $T \Rightarrow U^\perp$ è invariante per T

Dimostrazione: $T(U) \subseteq U \quad \Rightarrow \quad T(U^\perp) \subseteq U^\perp$ TESI

sia $u \in U$ e $w \in U^\perp \Rightarrow u \cdot w = 0$

$\Rightarrow$ devo dim. che $\forall w \in U^\perp \Rightarrow T(w) \in U^\perp$

$$\Rightarrow T(w) \cdot u = w \cdot T^{-1}(u) = 0 \quad \forall w \in U^\perp$$

$$\overset{\|}{0} \Rightarrow T(w) \in U^\perp$$

c.v.d

Quali sono gli autovalori di T isometrico?

Sia λ autovalore di $T \Rightarrow \exists$ autovettori v di $\mathbb{R}^n \mid T(v) = \lambda v$

e $v \neq 0 \Rightarrow T(v) \cdot T(v) = \lambda^2 v \cdot v$

$$\| \quad v \cdot T^{-1}(T(v)) = v \cdot v$$

$\Rightarrow \lambda^2 \cdot v \cdot v = v \cdot v \quad \forall v \in \quad v \neq$

$\forall v$ autovettore relativo a λ

$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad \Leftarrow$

Proposizione: Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometrico
$\Rightarrow$ autovettori ~~[illegible]~~ relativi ad autovalori diversi sono ORTOGONALI

DIMOSTRAZIONE: (DA FARE PER ESERCIZIO)

Diamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $\beta_{\perp n}$ (fissata nel dominio e nel codominio di T)

$\to$ come è fatta la matrice $A \in M_{n\times n}$ associata a T nella base $\beta_{\perp n}$ cioè $A = [T]_{\beta_{\perp n}}$?

$\to$ considero $v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow [v]_{\beta_{\perp n}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $[w]_{\beta_{\perp n}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [T(v)]_{\beta_{\perp n}} = A\cdot[v]_{\beta_{\perp n}} \quad e \quad [T(w)]_{\beta_{\perp n}} = A\cdot[w]_{\beta_{\perp n}}$$

$$\Rightarrow T(v)\cdot T(w) = [T(v)]^T B [T(w)] = [T(v)]^T_{\beta_{\perp n}} \cdot I \cdot [T(w)]_{\beta_{\perp n}}$$

$\hookrightarrow \boxed{B = I}$

$$= (A[v]_{\beta_{\perp n}})^T \cdot (A[w]_{\beta_{\perp n}}) = \underline{[v]^T_{\beta_{\perp n}} \cdot A^T \cdot A \cdot [w]_{\beta_{\perp n}}}$$

Ma $T(v)\cdot T(w) = v\cdot w = \underline{[v]^T_{\beta_{\perp n}} \cdot I \cdot [w]_{\beta_{\perp n}}}$ $\quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \boxed{A^T \cdot A = I} \Rightarrow A \text{ è ortogonale}$$

$\Rightarrow$ La matrice associata ad un operatore isometrico in una base ortonormale è ORTOGONALE

(ricordando che i vettori riga/colonna di A sono ortonormali)

$\to$ Se A è ortogonale $\Rightarrow$ $\det A = \pm 1$: infatti $A^T \cdot A = I$

$$|A^T A| = |I| = |A^T|\cdot|A| = |A|^2 = 1$$

Le radici caratteristiche reali di A ortog. sono ± 1

Quali sono i possibili operatori isometrici ~~di~~ su $\mathbb{R}$?

PER $n=1$

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\to$ essendo T lineare $T(x) = \alpha x$

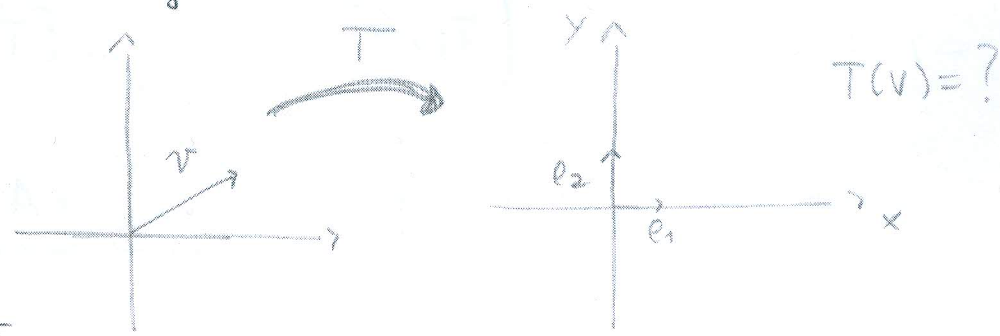
$\Rightarrow$ α è un autovalore $\Rightarrow$ $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$

$$\left.\begin{array}{ll} 1) \; T(x) = x & \text{identità} \\ 2) \; T(x) = -x & \text{simmetria rispetto all'origine} \end{array}\right\}$$

LE UNICHE APP. LINEARI OPERATORI ISOMETRICHE in $\mathbb{R}$

Quali sono i possibili operatori isometrici su $\mathbb{R}^2$?

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ scelgo una base $\to$ canonica



matrice associata a T:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ortogonale}$$

Classificare tali matrici supponendole ortogonali : ESERCIZIO