13/03/2019

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale su K; consideriamo l'insieme delle "forme o funzionali" lineari su V cioè $\{L : V \to K \text{ lineari}\}$.

tale insieme è dotato di due operazioni:

- la somma $L_1 + L_2$ è così definita $(L_1+L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v) \quad \forall v \in V$
- la moltiplicazione per uno scalare αL così definita: $(\alpha L)(v) = \alpha(L(v))$

L'insieme dato con tali operazioni è uno spazio vettoriale su K: esso è detto spazio duale di V e si indica con V^* oppure $V^\vee$. → (DA FARE)

CERCHIAMO UNA BASE DELLO SP. VETTORIALE

Fisso una base di V, $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

considero una forma η_j(eta): $V \to K$ così definita sui vettori di B_V

$$\eta_j(v_e) = \begin{cases} 1 & \text{se } e = j \\ 0 & \text{se } e \neq j \end{cases}$$

cioè sono definiti mediante i simboli di Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

η_j è una forma lineare $\forall j = 1, \dots, n$.

$$\eta_1 : V \to K \qquad\qquad ; \qquad \eta_2 : V \to K \qquad \dots \qquad \eta_n : V \to K$$

$$\begin{array}{lll}
v_1 \longmapsto \eta_1(v_1) = 1 & v_1 \mapsto \eta_2(v_1) = 0 & v_1 \mapsto \eta_n(v_1) = 0 \\
v_2 \longmapsto \eta_1(v_2) = 0 & v_2 \mapsto \eta_2(v_2) = 1 & \vdots \\
\vdots & v_3 \mapsto \eta_2(v_3) = 0 & \\
 & \vdots & \\
v_n \longmapsto \eta_1(v_n) = 0 & v_n \mapsto \eta_2(v_n) = 0 & v_n \to \eta_n(v_n) = 1
\end{array}$$

TALI APPLICAZIONI SONO DEFINITE $\forall v \in V$, POICHÈ SONO DATE LE IMMAGINI DEI VETTORI DI BAS

$\Rightarrow \eta_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n) = \alpha_1 \eta_1(v_1) + \alpha_2 \eta_1(v_2) + \dots + \alpha_n \eta_n(v_n)$

$$\eta_1\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \alpha_1$$

$$\eta_2\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\eta_n\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \alpha_n$$

Dimostro $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ generano V^*

dato $L: V \longrightarrow K$

$\Rightarrow$ devo dimostrare che esistono n scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che $L = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j$ $\forall L \in V^*$.

Poniamo il caso in cui L sia data.

L è data se conosco $L(v_i)$ $\forall i = 1, \dots, n$ DOVE v_i SONO I VETTORI DI BASE

ESSENDO L DATA, CONOSCO $L(v_i) = \beta_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ prendo $\alpha_i = \beta_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ costruisco $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i$ $\Rightarrow$ cerco $\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\eta_i(v_j)\right) = \beta_j$ ..

.. $\forall j = 1, \dots, n$ $\Rightarrow L = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \eta_j$

- Lineare indipendenza: $\underbrace{\text{Posto } \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j = 0}_{\text{comb. lin.} = \text{vett. nullo}}$ $\Rightarrow$ (DEVO DIMOSTRARE CHE) $\alpha_j = 0, \forall j = 1, \dots, n$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j\right)(v_i) = 0(v_i) \Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\eta_j(v_i)\right)}_{\text{per la linearità}} = \alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow \underbrace{\{\eta_1, \dots, \eta_n\}}$ è base di V^* $\Rightarrow \dim V^* = n$

c.v.d.

È detta <u>base duale di B_V</u>.

Posso dare un isomorfismo $\varphi: V \longrightarrow V^*$
$v_j \longmapsto \eta_j$

L'applicazione φ è data sui vettori di base: $\varphi(v_j) = \eta_j$

$$\Rightarrow \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j$$

φ per come è definita è un morfismo di spazi vettoriali. CIOÈ UNA APPLICAZIONE LINEARE

Per dimostrare che φ è un isomorfismo bisogna dimostrare che φ è biiettiva. DIMOSTRAZIONE:

$$\varphi\ V \longrightarrow V^*$$
$$v_j \longmapsto \eta_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j$$

SE $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_V\}$ => IL MORFISMO È INIETTIVO:

(vettore nullo di V (dominio))

$\{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ ⇒ sia $v \in \operatorname{Ker}\varphi$ => scrivo $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$

$\Rightarrow \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j = 0_{V^*}$, DOVE 0_{V^*} È L'APPLICAZIONE NULLA CHE MANDA OGNI VETTORE DI V IN 0_V, COMPRESI I VETTORI DI BASE => $(\sum \alpha_j \eta_j)(v_i) = \sum \alpha_j \eta_j(v_i) = \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, .., n$ => È INIETTIVA

Abbiamo dimostrato che è biiettiva, perché è iniettiva, POICHÉ PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\varphi = n - 0 = n = \dim V^*$.

Dato V sp. vett n-dimensionale posso dare il mio biduale V^{**} o $V^{\vee\vee}$, così COME ABBIAMO COSTRUITO V^*, A PARTIRE DA V^*.

MENTRE φ NON È UNICO, PERCHÉ DIPENDE DALLA BASE SCELTA IN V, POSSIAMO costruire $\Phi : V \longrightarrow V^{**}$: è un isomorfismo: SI COSTRUISCE COME ABBIAMO COSTRUITO φ E SI DIMOSTRA L'INDIPENDENZA DALLA BASE SCELTA ⇒ TALE ISOMORFISMO Φ È ALLORA CANONICO.

Esercizio

Dato $V = \mathbb{R}^3$ e la base $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ⇒ trovare la base duale.

POICHÉ V^* È L'INSIEME DI FORME LINEARI, UN SUO ELEMENTO SARÀ:

$$\boxed{\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \end{aligned}}$$

⇒ CERCO $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ TALI CHE, detti v_1, v_2, v_3 I VETTORI DI $B_{\mathbb{R}^3}$ $\eta_j'(v_i) = \delta_{ij} \quad \forall j, i = 1, 2, 3$ =>

η_1: (1) $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$ η_2: (2) $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$ η_3: (3) $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 1 \end{cases}$

Risolvo i 3 sistemi

$\eta_1 = x$ $\qquad$ $\eta_2 = 7x - 2y - 3z$ $\qquad$ $\eta_3 = -2x + y + z$

La base dello spazio duale di V è

$B_{V^*} = \left\{ (x), (7x - 2y - 3z), (-2x + y + z) \right\}$