$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 10/10/18

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 21 & 21 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$: ESEMPIO DEL [NON VALE LA PROPRIETÁ COMMUTATIVA]

$\Downarrow$

FATTO CHE NON VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA PER LA MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI.

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times5} = C_{2\times5}$$
$$\neq$$
$$B_{3\times5} \, A_{2\times3} \neq A \cdot B$$

ANALIZZIAMO ALTRE POSSIBILI PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI:

PROPRIETÁ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA DI MATRICI:

$$A \hat{\cdot} (B \hat{+} C) = (A \hat{\cdot} B) \hat{+} (A \hat{\cdot} C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times m}$$

PONIAMO:

$A = (a_{ij})_{i,j=[1,n]}$ $B = (b_{ij})_{i,j=[1,n]}$ $C = (c_{ij})_{i,j=[1,n]}$

$B \hat{+} C = (b_{ij} + c_{ij})_{i,j}$ $\hat{A} \cdot (B \hat{+} C) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} (b_{lj} + c_{lj}) \right)$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{n} a_{il} (b_{lj} + c_{lj}) = \sum_{l=1}^{n} \left((a_{il} \cdot b_{lj}) + (a_{il} \cdot c_{lj}) \right) = \sum_{l=1}^{n} (a_{il} \cdot b_{lj}) + \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot c_{lj}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} (b_{lj} + c_{lj}) \right) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj} + \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot c_{lj} \right)$$

$$A \hat{\cdot} (B \hat{+} C) = (A \hat{\cdot} B) \hat{+} (A \hat{\cdot} C)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} (b_{lj} + c_{lj}) \right) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} + a_{il} c_{lj} \right) \Rightarrow$$

Essi sono uguali: ~~[illegible]~~ difatti a_{il}, b_{lj}, c_{lj} sono numeri reali, perciò la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma vale.

ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO TRA MATRICI: CONSIDERO UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{n\times n} \Rightarrow$

$\exists B = (b_{ij})_{n\times n} \mid A \cdot B = A \quad \forall A$

Pongo $B = (X_{ij})$ MATRICE INCOGNITA

~~Esempio~~ Esempio ($n=1$)

$A = (a_{11})$ $B = (x_{11}) \Rightarrow A \cdot B = A$

$\Rightarrow A \cdot B = a_{11} \cdot x_{11} = A = a_{11}$

$\Rightarrow \boxed{x_{11} = 1}$

ESEMPIO ($n=2$) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ PONGO $B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1x_{11} + 2x_{21} & 1x_{12} + 2x_{22} \\ 3 \cdot x_{11} + 4x_{21} & 3x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$\Downarrow$

TRASFORMIAMO IN UN SISTEMA UGUAGLIANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI DELLE DUE MATRICI

$\Downarrow$

$$\Sigma: \begin{cases} 1\cdot x_{11}+2x_{21}=a_{11} \\ 1\cdot x_{12}+2x_{22}=a_{12} \\ 3x_{11}+4x_{21}=a_{21} \\ 3x_{12}+4x_{22}=a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x_{11}+2x_{21}=1 \\ 1x_{12}+2x_{22}=2 \\ 3x_{11}+4x_{21}=3 \\ 3x_{21}+4x_{22}=4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&0&1 \\ 0&1&0&2&2 \\ 3&0&4&0&3 \\ 0&3&0&4&4 \end{array}\right)$$

$3R_1-R_3\to R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&0&1 \\ 0&1&0&2&2 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&3&0&4&4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&0&1 \\ 0&1&0&2&2 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&2&2 \end{array}\right)$$

$3R_2-R_4\to R_4$

rango = 4 massimo POICHÉ LA MATRICE HA 4 PIVOT

$\Rightarrow$ Soluzione $Sol:\Sigma: \infty^{4-4} = \infty^0=1$

FACENDO IL PROCEDIMENTO IN ASCESA DEL METODO DI RIDUZIONE DI GAUSS:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&2&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_{11}=1 \\ x_{12}=0 \\ x_{21}=0 \\ x_{22}=1 \end{cases} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}$$

= MATRICE IDENTITÀ (2x2) $I_{2\times 2}$

$R_2-R_4\to R_2$

$R_1-R_3\to R_1$

$\frac{R_3}{2}\to R_3$

$\frac{R_4}{2}\to R_4$

RICORDO LA DEFINIZIONE DI ELEMENTO NEUTRO e:
e è elemento neutro se $a e = a \vee e\cdot a = a \quad \forall a \in$ Insieme dato

ABBIAMO TROVATO I TALE CHE $A\circ I = A \ \forall A\in \mathcal{M}_{2\times 2}$; DOBBIAMO ORA DIMOSTRARE ANCHE CHE $I\circ A = A\ \forall A$

$$I\circ A = ? \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12} \\ a_{21}&a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}&a_{12} \\ a_{21}&a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow$ I È ELEMENTO NEUTRO DI $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Elemento neutro in $\mathcal{M}_{3\times 3}$

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrice 3x3 con tutti 1 sulla diagonale e zero sopra e sotto essa

DIMOSTRIAMO CHE $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$; MENTRE $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ SE $a,b \in \mathbb{R}$

$(A+B)(A+B) = (A+B)\cdot A + (A+B)B$ PER LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO

$= A\cdot A + BA + A\cdot B + B\cdot B$ (in generale)

$= A^2 + BA + A\cdot B + B^2$ POICHÉ $A\cdot B \neq B\cdot A$!!

DEFINIZIONE

Data una matrice quadrata $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ si chiama "DETERMINANTE" di A e si indica $|A|$ o $\det A$ o $\mathrm{Det}A$ o ΔA o $\|A\|$, il numero reale associato ad A così ottenuto:

1) $A=(a) \Rightarrow \det A = a$

ESEMPIO: $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2 = \det A$

2) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (a\cdot d)-(b\cdot c)$

3) $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} \Rightarrow \det A \Rightarrow$ Scelgo UNA RIGA: AD ESEMPIO, LA PRIMA: facciamo la somma degli indici $i+j$ DELL'ENTRATA a_{ij}: MOLTIPLICHIAMO L'ENTRATA a_{ij} PER $(-1)^{i+j}$.

$\Rightarrow +a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix} = \det A$

Esempio:

$$\begin{vmatrix}1&-2&3\\-1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix} = -2-10-3 = -15$$

Se $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ allora il determinante reale secondo LAPLACE è $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot |A_{\hat{ij}}|$

togliendo la i-esima e j-esima colonna dell'elemento di partenza