Conclusione precedente esercizio: 13/04/2019

$$Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$

è espressa nelle coordinate della base canonica e di $\mathbb{R}^3$

- Studiare la forma quadratica, darne la forma canonica e trovare la base B di $\mathbb{R}^3$, F_Q-ortogonale, rispetto alla quale Q è in forma canonica e la matrice S tale che $[Q]_B = S^T [Q]_e S$

La matrice rispetto alla base canonica è

$$[Q]_e = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

Studiare la forma quadratica vuol dire trovare rango e segnatura

Se il rango è massimo, abbiamo (NELLA SUA FORMA CANONICA) tutte le variabili al quadrato, in particolare il valore del rango ci dice il numero di variabili al quadrato.

- Supponiamo che il rango sia massimo e segnatura $(2,1)$

↳ Abbiamo dimostrato che esiste una base in cui abbiamo

$$Q(Y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

NB nella forma canonica i coefficienti delle variabili al quadrato non sono necessariamente 1 e −1

↳ ES

$$Q(Z) = 2z_1^2 + 3z_2^2 - 4z_3^2$$

CERCHIAMO LA BASE CON IL METODO DI GAUSS PER LE FORME QUADRATICHE

↓

~~Questa~~ La parte di riduzione in forma canonica è già stata svolta: 1° cambiamento di coordinate

$$\hookrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

2° cambiamento di coordinate $\rightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$

Da cui abbiamo ottenuto

$Q(z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ è già ridotta alla forma canonica (senza dover utilizzare Sylvester)

- cerchiamo ora la base FINALE:

1. cambiamento totale di coordinate $\Sigma : \begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$

2. Sappiamo che $[Q]_B$ nella base ignota Σ:

$$[Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} S$$

3. Esprimo il sistema sopra Σ in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mandiamo ogni vettore in se, ma in basi diverse

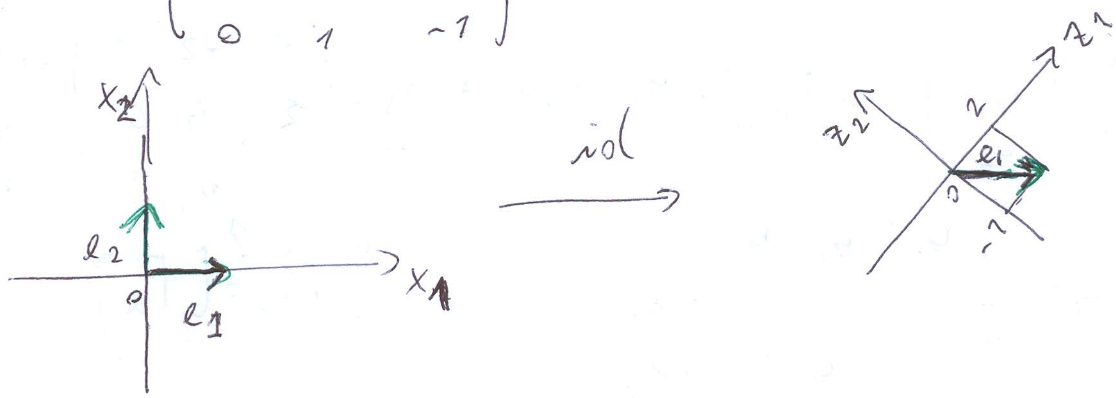
$id : (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, B)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Voglio cercare l'inversa della matrice associata al sistema, e i vettori colonna della matrice che troverò saranno i vettori della base che dà Q in forma canonica

NB: A^{-1} avrà rango massimo perché il cambio di coordinate è una applicazione BIETTIVA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{cerco } A^{-1}$$



Visto che la base che sto cercando mi deve dare una matrice diagonale, la nuova base sarà F_a-ortogonale

Invertiamo finalmente la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$R_2 - R_3 \to R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$R_1 - R_3 \to R_1$ $\qquad$ $2R_2 + R_1 \to R_1$ $\qquad$ I $\qquad$ A^{-1}

$R_2 - R_3 \to R_2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow[A^{-1}]{id} (\mathbb{R}^3, \mathcal{C})$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Quella trovata è una base F_Q-ortogonale?

Per verificarlo cerco la forma polare di $Q(X) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F_Q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow F_Q((X,Y)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$[Q]_e = [F_Q]$$

$$[Q]_e = [F_Q] = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

$$\longrightarrow F_Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = +x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3$$

~~Per essere F_Q-ortogonali, i vettori della base trovata devono esserlo~~

Controlliamo se i vettori della base trovata sono F_Q-ortogonali:

$F_Q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) = 0$; eseguendo i conti per ogni coppia di vettori di base si verifica facilmente che ~~[illegible]~~ otteniamo sempre 0, quindi i vettori di base sono F_Q-ortogonali, come era da aspettarsi.

Per concludere: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ t.c. $[Q]_B = S^T [Q]_e S$

(DA VERIFICARE)

Se per trovare la matrice DIAGONALE diagonalizziamo la matrice associata a Q, troviamo una matrice sì diagonale, ma SIMILE a quella di partenza, mentre noi cerchiamo una matrice CONGRUENTE a quella di partenza, due concetti molto diversi.

SIMILITUDINE : $A \sim_S B \iff B = S^{-1}AS$ (RIGUARDA LE app. lineari)

CONGRUENZA : $A \sim_C B \iff B = S^TAS$ (RIGUARDA forme bilineari)

A è diagonalizzabile $\iff \exists\, D \,/\, D = S^{-1}AS$

PER UNA FORMA QUADRATICA:
ridurre a forma canonica $\iff \exists\, D \mid D = S^TAS$

SE ESISTESSERO MATRICI QUADRATE S PER CUI $S^T = S^{-1}$, LA MATRICE D TROVATA SAREBBE CONTEMPORANEAMENTE SIMILE E CONGRUENTE AD A.

EBBENE: $\exists$ matrici S tali che $S^T = S^{-1}$: sono matrici $\boxed{\text{ORTOGONALI}}$

Per poter sfruttare la diagonalizzazione, S deve essere ortogonale

ESEMPIO:

$$Q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

ridurla a forma canonica trovando la base

- METODO DI GAUSS

$$Q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = (x_1+x_2)^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

$$Q\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = y_1^2$$ f. quadratica degenere, infatti il

RANGO = 1 ⇒ Rango non è massimo $[Q] = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

- cerco la base

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A^{-1} \qquad [Q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- DIAGONALIZZAZIONE

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad (\mu(0) = 1) \qquad \lambda_2 = 2 \quad (\mu(2) = 1)$$

$[Q]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cerco la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

cerco gli autospazi

$$E_0 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x_1 + x_2 = 0 \to E_0 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

$$E_2 \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -x_1 + x_2 = 0 \to E_2 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

questi due vettori formano una nuova base, devo vedere se sono ortogonali rispetto alla forma bilineare associata alla forma quadratica : $F_Q : x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

$F_Q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$ OK sono ORTOGONALI RISPETTO a F_Q

ora ho trovato $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ che mi dà $D = S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} S$

ora ~~per~~ devo verificare che $S^{-1} = S^{T}$, cioè che S sia ortogonale: SI VEDE FACILMENTE CHE S NON È ORTOGONALE: NELLE MATRICI ORTOGONALI, L'IMMAGINE DEI VETTORI COLONNA TRAMITE LA FORMA BILINEARE DEVE ESSERE 1! CIOÈ DEVONO ESSERE NORMALIZZATI

MA: $F_a\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4$

$F_a\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$ è ISOTROPO, quindi non possiamo mai trovare un suo multiplo che dia 1 usando F_a

LA MATRICE S ALLORA DEVE ESSERE ORTOGONALE RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE PERCHÉ

Se F_a è il prodotto scalare possiamo ~~[illegible]~~ sempre trovare vettori di base ORTONORMALI $\rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ NORMALIZZANDO I VETTORI TROVATI COME BASI DEGLI AUTOSPAZI: QUESTA È LA BASE $\tilde{B}$ RICHIESTA!

ED INFATTI S È TALE CHE $S^{T} = S^{-1}$: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = S$: È LA MATRICE CHE RENDE LA MATRICE A CONGRUENTE ALLA MATRICE DIAGONALE $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE

Una matrice simmetrica reale ha solo radici caratteristiche REALI

Dimostrazione: Sia λ_0 radice caratteristica della matrice, cioè radice di $|A - \lambda I| = 0$

considero il sistema $(A - \lambda_0 I)(X) = 0$, se C è soluzione reale $\rightarrow \lambda_0$ è reale

Suppongo che C sia complesso

$AC = \lambda_0 C \rightarrow$ considero $\bar{C}$ (il coniugato), ha come vettori i ~~coniu~~ coniugati di tutte le coordinate di C

$\bar{C}^T A C = \bar{C}^T \lambda_0 C = \lambda_0 \bar{C}^T C = \lambda_0 \sum_{s=1}^{n} \bar{c}_s c_s$ è un numero reale perché la somma dei prodotti tra un complesso e il suo coniugato $\rightarrow \lambda_0 = \dfrac{\bar{C}^T A C}{\sum_{s=1}^{n} \bar{c}_s c_s}$

verifico che $\overline{\bar{C}^T A C} = \bar{C}^T A C$

$$\overline{\bar{C}^T A C} = C^T \bar{A} \bar{C} = \underbrace{C^T A \bar{C} = (\bar{C}^T A C)^T}_{\text{essendo scalari, allora la trasposta coincide con quella iniziale}}$$

reale $\bar{A} = A$

$$C^T A \bar{C} = (C^T A \bar{C})^T$$

Se abbiamo matrici simmetriche reali, gli autovalori sono tutti reali.

c.v.d