 Teorema - (MATRICI SIMMETRICHE): 29/05/2013

Matrici simmetriche reali hanno tutti gli autovalori reali.

RIVEDIAMO LA dimostrazione: La matrice A, simmetrica e reale è associata all'operatore simmetrico $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in $B_{\perp n}$, base ortonormale di $\mathbb{R}^n \Rightarrow [T]_{B_{\perp n}} = A$

abbiamo verificato il teorema per $n = 1, 2$;

in generale, supponiamo che $\exists$ un autovalore $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}\} \Rightarrow$

λ_0 è radice del polinomio caratteristico di A e supponiamo allora che z_0 sia soluzione complessa dell'equazione $(A - \lambda_0 I)z = 0$, $z_0 \in \mathbb{C}^n \Rightarrow z_0$ è visto come un autovettore relativo all'autovalore λ_0 per l'operatore $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $z \to Az$ associato sempre ad A nella base $B_{\perp n}$.

Dunque $Az_0 = \lambda_0 z_0$ e, essendo T simmetrico, $z \cdot T(w) = T(z) \cdot w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow$ considero $z = \overline{z_0}$ e $w = z_0 \Rightarrow$

$z \cdot T(w) = \overline{z_0} \cdot T(z_0) = \overline{z_0}^T A z_0 = \overline{z_0}^T \lambda_0 z_0 = \lambda_0 \overline{z_0}^T z_0$

MA PER LA SIMMETRIA CONSIDERO:

$T(\overline{z_0}) \cdot z_0 = (A\overline{z_0})^T z_0 = \overline{\lambda_0}\, \overline{z_0}^T z_0$; PERCIÒ QUINDI

$$\overline{Az_0} = \overline{A}\,\overline{z_0} = A\overline{z_0}, \quad \overline{Az_0} = \overline{\lambda_0 z_0} = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0} \;\Rightarrow\; A\overline{z_0} = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}$$

ABBIAMO $\Rightarrow \lambda_0 \cancel{\overline{z_0}^T z_0} = \overline{\lambda_0} \cancel{\overline{z_0}^T z_0} \Rightarrow \lambda_0 = \overline{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}$

Q.E.D

DATA UNA MATRICE SIMMETRICA REALE $A \Rightarrow$ ad A è associato un operatore $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrico, in una base ortonormale $B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^n$, ed anche una forma quadratica $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, DEFINITA, se pongo $X = [v]_{B_{\perp n}}$, COME $\boxed{q(x) = T(v) \cdot v}$. INFATTI:

$T(v) \cdot v = (Ax)^T I x = x^T A^T x = \underbrace{x^T A x}$ che è proprio una forma quadratica con matrice A

Essendo T simmetrico $\to A$ simmetrica reale $\Rightarrow A$ può essere ortogonalmente diagonalizzabile, cioè $\exists\, B'$, ortonormale, di $\mathbb{R}^n$, rispetto alla quale $[T]_{B'} = D$, cioè $\exists$ una matrice ortogonale S tale che $D = \underbrace{S^{-1}AS = S^TAS}_{\text{ortogonale}}$. S è la matrice definita dalla nuova base $B' \Rightarrow$ se chiamo $X = (x_1, \dots, x_n)$ le coordinate di $\mathbb{R}^n$ definite da $B_{\perp n}$ ed $Y = (y_1, \dots, y_n)$ le coordinate di $\mathbb{R}^n$ nella nuova base $B' \Rightarrow X = SY$

② $X = SY$

considerino $q(x)$: forma quadratica associata ad A in B_{1n}

$$q(x) = X^TAX \underset{\text{Cambio coordinate}}{=} (SY)^TASY = Y^T(\underbrace{S^TAS}_{D})Y = Y^TDY$$

quindi essendo D la matrice diagonale con gli AUTOVALORI di T sulla diagonale,

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Y^TDY = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 = q(y)$$

QUINDI : CONSIDERANDO LE COORDINATE nella base che diagonalizza si ottiene una quadratica in forma canonica !!

Es

$q(x_1x_2x_3) = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_3$ $\qquad q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$q(x) = X^TAX$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- cerco gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2-\lambda \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(12+\lambda^2-8\lambda) - 16(6-\lambda) = 0$$

$$= (2-\lambda)^2(6-\lambda) - 16(6-\lambda)$$

$$(6-\lambda)[4+\lambda^2-4\lambda-16] = 0$$

$\lambda = 6$, $\lambda = -2$

con $\mu(6) = 2$ e $\mu(-2) = 1$

$\lambda = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ha rango 2, $\Rightarrow \dim E(-2) = 1$

$\lambda = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ha rango 1, $\dim E(6) = 2$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- cerco la base formata dagli autovettori relativi agli autovalori, ortonormali

es. $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$ e quindi nelle nuove coordinate $y = (y_1, y_2, y_3)$ si HA

$$\boxed{q(y) = -2y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2}$$

③ Definizione: chiamiamo "QUADRICA" di $\mathbb{R}^n$ il luogo degli zeri di polinomio di grado 2 nelle variabili $(x_1,\dots,x_n)$, coordinate di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo cioè l'equazione

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\le j}}^{n} a_{ij}\, x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0 \Rightarrow \text{MATRICIALMENTE} \quad X^T(a_{ij})X + (b_1,\dots,b_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} + c = 0$$

es. in $\mathbb{R}$: $ax^2+bx+c=0$ (CORRISPONDONO A DUE PUNTI, UN PUNTO O NESSUN PUNTO IN $\mathbb{R}$)

in $\mathbb{R}^2$: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + \cancel{a_{21}x_2x_1} + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0$ [CONICHE DI $\mathbb{R}^2$]

rientra in $a_{1,2}$

in $\mathbb{R}^3$: $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0$ [SUPERFICI QUADRICHE in $\mathbb{R}^3$]

da $\mathbb{R}^4 \rightarrow$ IPERQUADRICHE