In uno spazio vettoriale reale n-dimensionale, $\Rightarrow \mathbb{R}^n$, definiamo
(SPAZIO EUCLIDEO)
una forma bilineare simmetrica definita positiva
detta <u>PRODOTTO SCALARE</u> $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow (\mathbb{R}^n; \varphi)$ é detto <u>SPAZIO EUCLIDEO</u>

29/04/2013 (1)

Esempi ed esercizi:

· in $\mathbb{R}^2$: $\varphi(x,y) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ $\quad\varphi$ bilineare simmetrica

definita positiva? $A = [\varphi]_e = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{array}$ per Jacobi é definita positiva $\Rightarrow \varphi$ é PRODOTTO SCALARE

in questo caso é un prodotto scalare standard $(x^T I \cdot y) = (x^T \cdot y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

· in $\mathbb{R}^n$: $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

I) in $\mathbb{R}^2$ definiamo $\varphi(x,y) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2 \cancel{y_2}$

$(\mathbb{R}^2, \varphi)$ é spazio euclideo? $\quad A = [\varphi]_e = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \end{array}$
[DIMOSTRA]

II) Sia $V = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{, } f \text{ continue} \} = \mathcal{C}^0_{[a,b]}$ e definiamo su V, $\varphi : \mathcal{C}^0_{[a,b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \to \mathbb{R}$

$(f,g) \to \int_a^b f(t)g(t)\,dt$

[DIMOSTRA che la forma é bilineare, simmetrica definita positiva]

↳ $(\mathcal{C}^0_{[a,b]}, \varphi)$ é uno spazio euclideo a dimensione infinita

III) Sia $V = \mathbb{R}[t]_n = \{$polinomi a coefficienti reali nella variabile t di grado al massimo $n\}$

e diamo $\varphi\ \mathbb{R}[t]_n \times \mathbb{R}[t]_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(p,q) \longmapsto \int_{-1}^{+1} p(t)q(t)\,dt$ $\quad\to (\mathbb{R}[t]_n, \varphi)$ é uno spazio euclideo $n+1$ dimensionale

Consideriamo dunque in $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ spazio euclideo, la forma quadratica associata a φ: $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X \longmapsto Q(X) = \varphi(X,X)$$

φ definita positiva $\Rightarrow \varphi(x,x) > 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow Q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$

definizione definiamo NORMA (o LUNGHEZZA) del vettore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\|X\|$

$$\|X\| = \sqrt{Q(X)} = \sqrt{\varphi(X,X)}$$

Es. Se dico in $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ con φ prod. scalare standard $\Rightarrow$ posto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \|X\| = \sqrt{\varphi(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

> Esercizi.
>
> CALCOLARE LA NORMA negli esercizi I, II, III precedenti

in $(\mathbb{R}^4, \varphi)$ con $\varphi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é spazio euclideo

$$(X,Y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

se poniamo in $\mathbb{R}^4$ la forma $F: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la cui forma quadratica associata è $Q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

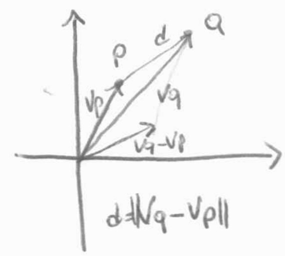
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c x_4^2 \qquad c > 0$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -c \end{pmatrix} \to \text{non é definita positiva}$$

$(\mathbb{R}^4, F)$ NON É SPAZIO EUCLIDEO
Q è detta Forma Quadratica di Minkowski, c = velocità luce
$\Bigg\} \Rightarrow$ É LO SPAZIO DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

vettori in cui
$Q(v) > 0$ vettori spazio
$Q(v) < 0$ vettori tempo
$Q(v) = 0$ vettori luce

Nello spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, \varphi)$



definizione: DISTANZA TRA DUE PUNTI $p, q \in \mathbb{R}^n$ ~~come~~ la ~~norma~~ -

$d(p,q) = \|V_p - V_q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^q - x_i^p)^2}$ = NORMA DELLA DIFFERENZA TRA VETTORI V_p E V_q

. In $(\mathbb{R}^n$, euclideo$)$ => definiamo un versore (UN vettore di lunghezza unitaria)

.DATO $v \in \mathbb{R}^n$, POSSIAMO ASSOCIARE A V UN VERSORE U, PONENDO $u = \frac{v}{\|v\|}$

. due vettori sono ortogonali se $\varphi(x,y)=0$ {come x TUTTE LE FORME BILINEARI}

Proposizione in $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ sp. euclideo (DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ)

. dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ => posto $x \cdot y$ (o $\langle x, y\rangle$) il loro prodotto scalare

=> si dimostra che $|x\cdot y| \le \|x\|\,\|y\|$

dim

. siano x, y lin dipendenti => $y = \alpha x$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

↳ $|x \cdot \alpha x| = |\alpha||x\cdot x|$

$\|x\|\,\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|^2 = \sqrt{\alpha x \cdot \alpha x}$ $\quad \sqrt{xx} = |\alpha||x\cdot x|$ } => $|x\cdot y| = \|x\|\,\|y\|$

. siano x, y lin indip

↳ considero il sottospazio $\langle\langle x,y\rangle\rangle = U$ e $B_U = \{x, y\}$ => restringo l'applicazione al sottospazio => $[\varphi]_{B_U} = \begin{pmatrix} x\cdot x & x\cdot y \\ y\cdot x & y \cdot y\end{pmatrix}$ => φ è definita positiva -> Jacoby => $|[\varphi]_{B_U}| > 0$

$(x\cdot x)(y\cdot y) - (x\cdot y)(y\cdot x) > 0$

$\|x\|^2\,\|y\|^2 > (x\cdot y)^2$ => $\|x\|\,\|y\| > (x\cdot y)$

=> $|x\cdot y| \le \|x\|\,\|y\|$ Q.E.D