28-11-2012

Siano $U, W < V$ => supposte date B_U e B_W => si cerca una base $U+W$ e di $U \cap W$

Esempio: $U = \langle\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle\rangle$ e $W = \langle\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle\rangle$

che tipo di sottospazi sono? U e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (ciò viene indicato DAL NUMERO ~~delle~~ coordinate dei generatori)

ESSENDO SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}^3$
- possono essere rette passanti per l'origine o piani (ESSENDOCI 2 GENERAT. NO TUTTO $\mathbb{R}^3$)

Come decidere? Bisogna vedere se i generatori qui ci sono linearmente indipendenti -> una volta scoperto il numero è possibile determinare la cardinalità della base

↳ è possibile affermare che i generatori di U e W sono linearmente in-dipendenti perché nessuno è multiplo dell'altro.

Poiché i generatori di U e W ne formano la base =>

$\left.\begin{array}{l} \dim U = 2 \\ \dim W = 2 \end{array}\right|$ => U e W sono piani per l'origine in $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO: dare le equazioni cartesiane e parametriche

Nel esempio per U => $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in U$ se $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ => $\begin{cases} x = s \\ y = s+t \\ z = t \end{cases}$ (*)

↳ è l'equazione parametrica per 2 ~~vario~~ parametri

(È DARE IL SISTEMA Σ_0 TALE CHE $U = \mathrm{Sol}\,\Sigma_0$)

=> è ora possibile trovare l'eq. cartesiana ricavando i parametri e sostituendoli all'equazione rimanente.

$U = \mathrm{Sol}\,\Sigma_0$ => Σ_0 è sistema lineare omogeneo... soluzione => $\dim \Sigma_0 =$ | è ~~...~~

> SAPPIAMO la dimensione dello spazio = n variabili − rango

ESSENDO $rg\,\Sigma_0 = 1$ => => $2 = 3 - 1$ (3 perché $\mathbb{R}^3$; 1 variabile dip.) =>

=> 1 è il numero di equazioni che servono nel sistema lineare Σ_0 • NEL SISTEMA (*) SI RICAVANO due parametri in 2 equazioni E SI sostituiscono alla III^a equazione

CIOÈ (IN GENERALE) Σ_0 È formato da un'equazione che si deduce dall'equazione parametrica ricavando i parametri e sostituendoli nelle rimanenti equazioni del sistema parametrico

In questo caso => $y = x + z$

ESERCIZIO
Fornire l'equazione parametrica e cartesiana di W.

• Per trovare l'equazione parametrica e poi cartesiana di $U+W$:

- costruire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ CON I GENERATORI DI U e W

- Trovare la base guardando quali generatori della matrice A sono linearmente indipendenti:

$$\overset{R_1-R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2+R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

~~A~~ priori potevamo stabilire che A ha rango al massimo $= 3$ e ~~almeno~~ minimo $= 1$

def: rg = n° max colonne (o righe) della matrice linearmente indipendenti.

(è una ~~altra~~ definizione di rango!)

in questo caso nella matrice riconosco che ~~tutti~~ i vettori colonna C_1, C_2 e C_3 sono linearmente indipendenti

=> i vettori $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti => sono una base di $U+W$. =>

=> $\dim(U+W) = 3$ perché ho trovato una base con 3 vettori ~~colonne~~ lin. indip =>

=> $U+W = \mathbb{R}^3$ lo spazio somma ricopre tutto $\mathbb{R}^3$ =>

=> È dunque possibile assegnare ~~come base~~ come base anche QUELLA FORMATA DA VETTORI canonici $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ perché prima abbiamo dimostrato che lo spazio somma $\equiv \mathbb{R}^3$.

infatti $n$variabili $- rg_{\Sigma_0} = 0$ => non c'è alcuna equazione CHE DEFINISCE TALE SPAZIO

• Ora cerco $U \cap W$:

è possibile lavorare col Teorema di Grassmann:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$$

tutte le dimensioni sono note

$$= 2 + 2 - 3 = 1$$

-> è una retta in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine

poiché ~~la~~ questa retta è unidimensionale, essa ~~è~~ un generico sottospazio, possiede una base costituita da 1 vettore, ~~.........~~.

$$\begin{matrix} -R_3+R_2 \\ \sim \\ -R_3+R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ (sto riconducendo la matrice alla forma canonica)

$$\overset{-R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ devo ora osservare quali hanno i vettori colonna lin. dipendenti:

LA COLONNA $C_4 = -C_1 + C_2 + C_3$

oss! $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & w_1 & w_2 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$. l'ultimo vettore colonna e' lin. dipendente rispetto ai primi 3
$\Rightarrow$ infatti: $w_2 = au_1 + bu_2 + cw_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow w_2 - cw_1 = au_1 + bu_2$

il vettore ottenuto e' dato sia come vettore di U ~~e~~ sia come di W => questo vettore vive sia in U che in W =>
=> vive in $U \cap W$

Pertanto cerco le combinazioni che individuano il vettore colonna lin. dip. in particolare cerco a e b tali da far risultare w_2 lin. dipendente:
Le entrate di w_2 esprimono i coefficienti che rendono verificata la combinazione lin.:

$$w_2 - cw_1 = au_1 + bu_2$$

Nel nostro caso
=>

$$C_4 = -C_1 + C_2 + C_3$$
$$w_2 = -u_1 + u_2 + w_1$$
$$w_2 - w_1 = -u_1 + u_2 \quad \in U \cap W$$

Ora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ considero tante righe quanto i vettori base di U dunque 2 righe

Le entrate nell'ultima colonna nelle prime 2 righe sono i coefficienti a e b delle combinazione lineare che descrive il vettore ~~che giace~~ che giace in $U \cap W$

Un altro metodo per trovare una base di $U \cap W$?
1> trovare l'equazione ~~[illegible]~~ di U, trovare l'equazione ~~[illegible]~~ di W e infine mettere a sistema le due equazioni trovate.
Infatti l'intersezione geometrica $\equiv$ sistema algebrico.
Una volta ricavata l'equazione di $U \cap W$ si ricava la base.

DEFINIZIONE: SOMMA DIRETTA DI DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI
Somma diretta di due spazi vettoriali:
Siano U e $W < V$ e supponiamo che $U \cap W = \{0\}$ =>

=> $U + W$ in questo caso si chiama somma diretta di U e W:

$$U \oplus W$$

E' lo spazio somma nel caso particolare in cui $U \cap W = \{0\}$

per Grassmann => $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$

DEFINIZIONE: dato uno sottospazio $U < V$ => esiste in V uno sottospazio W

$$U \oplus W = V$$

2

W è detto supplementare di U in V

↳ OSSERVAZIONE: dato $U < V$ esistono infiniti suoi supplementari.

Esercizio: dato $U = \langle\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle\rangle$ determinare un suo supplementare.

- trovare l'eq. cartesiana di U
- poiché si ha un sottospazio ambiente di dimensione $= 3$ e poiché $\dim U = 2$, il sottospazio supplementare sarà una retta.
- poiché $U = \langle\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle\rangle$ e $U \oplus W$ deve dare V, cerco un qualsiasi vettore linearmente indipendente dai vettori di U.

Perciò $W = \langle\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle\rangle$

Sia Σ un sistema lineare NON OMOGENEO: $\Sigma: AX = B$ con $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$, $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k \times 1}(\mathbb{R})$

- esistono sempre soluzioni per un sistema lin. non omogeneo? NO

controesempio: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

risolvo il sistema tramite sostituzione. ho a priori, poiché i primi membri delle due equazioni sono uguali, lo devono essere anche i secondi membri.

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 1 = 0 \end{cases}$ NON RISOLVIBILE poiché una equazione di Σ è impossibile.

c.v.d

- quando un sistema lin. NON omogeneo ha soluzioni?

↳ TEOREMA di $\boxed{\text{ROUCHÉ-CAPELLI}}$ Dato $A \cdot X = B : \Sigma$,

Considero la matrice dei coefficienti (o incompleta) A e la matrice completa $(A \vdots B)$

Il sistema ha soluzione $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} (A \vdots B)$

↳ dimostrazione: riscrivo il sistema mediante le colonne di A:

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 + \dots + \dots x_n C_n = B$$

analizzo la necessità "$\Rightarrow$": $\exists$ n-upla di numeri reali $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid A \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = B$

cioè $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$

$\Rightarrow$ il vettore B è combinazione lineare delle colonne di A

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A \vdots B) = \operatorname{rg} A$

analizzo la sufficienza "$\Leftarrow$", procedo in modo contrario rispetto all'analisi della necessità.

(viceversa la sufficienza della proposizione è dimostrata andando a ritroso nella dimostrazione fatta)

c.v.d

Se il sistema $AX=B$ ha soluzione $\Rightarrow$ quante soluzioni ha?

Tali soluzioni sono ∞^{n-r} con $r = rg\, A = rg(A \vdots B)$.

Cerchiamo tali soluzioni: consideriamo il sistema lineare omogeneo associato Σ_0 al sistema lineare non omogeneo $\Sigma: AX=B$

voglio dimostrare che $v \in Sol\Sigma \iff v = v_0 + w$ dove:

$v_0 \in Sol\Sigma_0$ (ben definita) e
w è soluzione particolare di Σ

~~sei particolare~~ v_0 è soluzione $\boxed{\text{generale}}$ di Σ_0.

"$\Leftarrow$"

$\rightarrow$ dimostrazione: 1) se $v = v_0 + w \Rightarrow v \in Sol\Sigma$ (dimostro la sufficienza)

cioè voglio che $Av = B \Rightarrow$

infatti $A(v_0 + w) = Av_0 + Aw = 0 + B = B$

per la proprietà distributiva delle matrici

2) se $v \in Sol\Sigma \Rightarrow$ ~~$v = v_0 + w$~~ $Av = B$

sia w sol. particolare di $\Sigma \Rightarrow Aw = B \Rightarrow$ ESSENDO $Av = B \Rightarrow Av = Aw \Rightarrow Av - Aw = 0$

per la proprietà distributiva: $A(v-w) = 0 \Rightarrow v - w \in Sol\Sigma_0$

$\hookrightarrow v - w = v_0 \Rightarrow v = v_0 + w$.

Esempio: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (A \vdots B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$

I ranghi sono uguali $\Rightarrow$ il sistema è risolubile.

$\begin{cases} x_1 = 3/4 \\ x_2 = 1/4 \end{cases}$

da sistemare: per trovare tutte le soluzioni del sistema

- Trovare soluzione generale di Σ_0
- Trovare " particolare di Σ

così è ~~ricavabile~~ sono ricavabili le soluzioni di Σ