(1)

$\circledast$ $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \right\}$.

In Hom$(V,\mathbb{R})$ si cerca una base costituita da forme lineare:

, CHE DEVONO SODDISFARE LA CONDIZIONE:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_j : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v_i \longrightarrow \delta_{ij}(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{array} \right. \qquad B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

PER FORMARE LA BASE DUALE DELLA BASE B_V

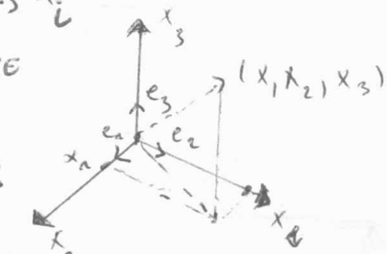
FORME LINEARI $\Rightarrow y_j := a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$

$y_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad i = 1,2,3$

$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_i$

SE PRENDIAMO IN $\mathbb{R}^3$ LA BASE CANONICA

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow$ I VETTORI DELLA BASE DUALE SONO LE PROIEZIONI SUGLI ASSI COORDINATI:



$\Rightarrow$

$y_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 1$; $y_1\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 0$; $y_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$; $y_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$ etc...

$\rightarrow$ PER ESSERE FORME LINEARI, DEVONO ESSERE:

$y_1(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$;

$y_2(x_1, x_2, x_3) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$;

$y_3(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$;

ORA CERCHIAMO UNA BASE DUALE DI B $\circledast$:

$y_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_1\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right) = a_1 - a_2 + 3a_3 = 1 \\ y_1\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = a_2 - a_3 = 0 \\ y_1\left(\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right) = 3a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} ; \quad \boxed{\begin{array}{l} y_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow 1x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{array}}$$

$$\begin{cases} y_2\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right) = b_1 - b_2 + 3b_3 = 0 \\ y_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = b_2 - b_3 = 1 \\ y_2\left(\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right) = 3b_2 - 2b_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_3 = -3 \\ b_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right) = c_1 - c_2 + 3c_3 = 0 \\ y_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = c_2 - c_3 = 0 \\ y_3\left(\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right) = 3c_2 - 2c_3 = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} y_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 \end{array}}$$

$B^*_{\mathbb{R}^3} = \{y_1, y_2, y_3\}$

$$\phi \quad \overset{B}{V} \longrightarrow \overset{B^*}{V^*} \qquad B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$v_1 \longrightarrow y_1 \qquad B^* = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$v_2 \longrightarrow y_2$

$v_3 \longrightarrow y_3 \qquad$ Se $v \in V \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = v$

$\vdots \qquad \Rightarrow \phi(v) = f = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n$: COME SONO

$v_n \longrightarrow y_n \qquad$ i β_j A PARTIRE DAI COEFFICIENTI DI v :

f FORMA LINEARE $\Rightarrow$ f : $\beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n$: $V \xrightarrow{\text{spazio vettoriale}} \mathbb{R}$

$v \mapsto a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots + a_n \beta_n$

$f(v) = (\qquad)(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 (\beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n)(v_1) + \dots$

$= a_1 \beta_1 y_1(v_1) + \dots + a_1 \beta_n y_n(v_1) + \dots + \dots$

$= a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots + a_n \beta_n$

$\phi : V \rightarrow V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$ $\qquad B = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$

$v \rightarrow \phi(v) = f \qquad$ (base duale) $\rightarrow B^* = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$\phi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 \phi(v_1) + \dots + a_n \phi(v_n)$

$= a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = f \Rightarrow \beta_j = a_j \ \forall j$

CERCO IL NUCLEO DI ϕ: $\ker \phi = \{v \in V$ tale che $\phi(v) = 0$ CIOE' $\phi(v) =$
$= (a_1 y_1 + \dots + a_n y_n) = 0\} \Rightarrow (a_1 y_1 + \dots + a_n y_n)(v) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow$

$(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n)(v_i) = 0 \quad \forall v_i \in B_V \Rightarrow$

$a_1 y_1(v_1) + \dots + a_2 y_n(v_i) = 0 \quad \forall v_i \in B_V \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \ker \phi = \{0\} \Rightarrow \phi$ E' INIETTIVO $\Rightarrow$ E' ANCHE SURIETTIVO PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI $\Rightarrow \phi$ E' ISOMORFISMO

~~[illegible]~~ TALE isomorfismo non è canonico PERCHE' ~~[illegible]~~ ~~(fissata la base si perde la)~~ DIPENDE DALLA BASE SCELTA IN V.

V^{**} = SPAZIO BIDUALE. $\Rightarrow V^{**} = V$

Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado ≤ 2. Siano Φ_1, Φ_2, Φ_3 i funzionali lineari su V definiti da:

$$\Phi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)\,dt \quad ; \quad \Phi_2(f(t)) = f'(1)$$

$$\Phi_3(f(t)) = f(0) . \qquad \text{con } f(t) \in V$$

Trovare la base di V duale a $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$

Lo spazio V ha dimensione su $\mathbb{R} = 3 \Rightarrow$ Anche $\dim V^* = 3$.

Vediamo innanzitutto se i tre funzionali dati costituiscono una base di V^*: basta dimostrare che sono linearmente indipend. cioè

$$\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 + \gamma\Phi_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 + \gamma\Phi_3)(f(t)) = 0 = \alpha\Phi_1(f(t)) + \beta\Phi_2(f(t)) +$$
$$+ \gamma\Phi_3(f(t)) = 0 = \alpha\int_0^1 f(t)\,dt + \beta f'(1) + \gamma f(0) \Rightarrow ⊛$$

Una base dello spazio dei polinomi è data da $\{1, t, t^2\}$ perciò $f(t) = a + bt + ct^2$

$$\alpha\int_0^1 (a + bt + ct^2)\,dt + \beta(b + 2ct)(1) + \gamma a = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right) + \beta(b + 2c) + \gamma a = 0$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Sia $\{v_1, v_2, v_3\} = \{a_1+b_1t+c_1t^2,\ a_2+b_2t+c_2t^2,\ a_3+b_3t+c_3t^2\}$ la base di V

$\Rightarrow$ per definizione, la base duale ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 è tale che

$$\begin{cases} \phi_1(v_1) = & \int_0^1 (a_1 + b_1 t + c_1 t^2)\, dt = 1 \\ \phi_2(v_1) = & (b_1 + 2c_1 t)(1) = 0 \\ \phi_3(v_1) = & a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1(v_2) = & \int_0^1 (a_2 + b_2 t + c_2 t^2)\, dt = 0 \\ \phi_2(v_2) = & (b_2 + 2c_2 t)(1) = 1 \\ \phi_2(v_2) = & a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1(v_3) = & \int_0^1 (a_3 + b_3 t + c_3 t^2)\, dt = 0 \\ \phi_2(v_3) = & (b_3 + 2c_3 t)(1) = 0 \\ \phi_3(v_3) = & a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[a_1 t + \frac{b_1 t^2}{2} + \frac{c_1 t^3}{3}\right]_0^1 = 1 \\ b_1 + 2c_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{c_1}{3} = 1 \\ b_1 + 2c_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = -2c_1 \\ -\frac{\cancel{2}c_1}{\cancel{2}} + \frac{c_1}{3} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ c_1 = -\frac{1}{2} \\ b_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow v_1 = t - \frac{1}{2}t^2$$

$$\begin{cases} \left[a_2 t + \frac{b_2 t^2}{2} + \frac{c_2 t^3}{3} \right]_0^1 = 0 \\ b_2 + 2c_2 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + \frac{b_2}{2} + \frac{c_2}{3} = 0 \\ b_2 = 1 - 2c_2 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ 3b_2 + 2c_2 = 0 \\ b_2 = 1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ 3 - 6c_2 + 2c_2 = 0 \\ b_2 = 1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ 3 - 4c_2 = 0 \\ b_2 = 1 - 2c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ c_2 = \frac{3}{4} \\ b_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{2} t + \frac{3}{4} t^2$$

$$\begin{cases} a_3 + \frac{b_3}{2} + \frac{c_3}{3} = 0 \\ b_3 + 2c_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{c_3}{3} - \frac{\cancel{2} c_3}{\cancel{2}} = 0 \\ b_3 = -2c_3 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 + c_3 - 3c_3 = 0 \\ \text{''} \\ a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = \frac{3}{2} \\ b_3 = -3 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_3 = 1 - 3t + \frac{3}{2} t^2$$