$L : V \to W$ lineare $\Rightarrow$ $\ker L = \{ v \in V / L(v) = 0 \}$ Fissate le basi $B_V, B_W \Rightarrow$ associamo la matrice $[L]_{B_V}^{B_W}$ e sappiamo

$[L(v)]_{B_W} = [L]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V} \Rightarrow \ker L = \{ [v]_{B_V} / [L]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V} = 0 \} \Rightarrow$

$\ker L$ è il sottospazio delle soluzione del sistema Σ_0 che ne risulta

$\Rightarrow \dim \ker L = \dim sol(\Sigma_0) = \dim V - \text{rango } [L]_{B_V}^{B_W}$

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (2x-y, 3y, x+y)$ (verificare la linearità mediante la definizione)

Fissate le basi canoniche in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ cerchiamo $[L]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$

Cerchiamo $L(e_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$
e $L(e_2) = L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

$(x,y) \longrightarrow (2x-y, 3y, x+y) \Rightarrow [L]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & B_1\\ \alpha_2 & B_2\\ \alpha_3 & B_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$
Cerchiamo $L(e_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$
e $L(e_2) = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\end{pmatrix}$

$\text{Im} L = \langle\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\text{Im} L \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ eq parametrica $\Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = 3t \\ z = s + t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2z - \frac{2}{3}y - \frac{y}{3} \\ t = y/3 \\ s = z - y/3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x - 2z + y = 0}$$

EQUAZIONE CARTESIANA

$\ker L = \{0\}$ quindi la nostra applicazione è iniettiva

CAMBIAMO BASE NEL DOMINIO

Data $B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$L(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [L]^{e_3}_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad id(\alpha v + \beta w) = \alpha v + \beta w = \alpha\, id(v) + \beta\, id(w)$$
$$v \longrightarrow v$$

È LINEARE!!

Supponiamo di considerare $B_{\mathbb{R}^n}$ nel dominio e nel condominio con $B_{\mathbb{R}^n} = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow [id]^{B_{\mathbb{R}^n}}_{B_{\mathbb{R}^n}} = ? \Rightarrow id(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

$id(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n$

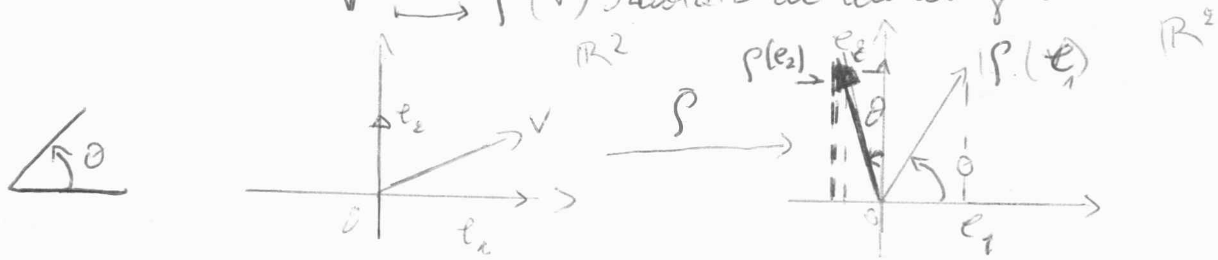
$\vdots$

$id(v_n) = v_n = 0v_1 + \dots + 1v_n$

> SE ABBIAMO LA STESSA BASE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO
> $\Rightarrow [id]^B_B = I$

Esempio $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: **ROTAZIONE**

$v \longmapsto \rho(v)$ ruotato di un angolo θ in verso antiorario



ρ è lineare. Scelte le basi canoniche nel dominio e nel condominio cerco $[\rho]^{e_2}_{e_2}$

$\rho(e_1) = \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$

$\rho(e_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) e_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) e_2 = -\operatorname{sen}\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2 \Rightarrow$

$[\rho]^{e_2}_{e_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\rho\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_{e_2} = [\rho]^{e_2}_{e_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, \cancel{x} - \operatorname{sen}\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$

$id: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ considero $(\mathbb{R}^2, B_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, B_2)$

$v \longmapsto v$ $\qquad\qquad v \longrightarrow v$

la matrice associata all'indentità così definita è la **MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE** nello stesso spazio: $M^{B_2}_{B_1}$

ESEMPIO:

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

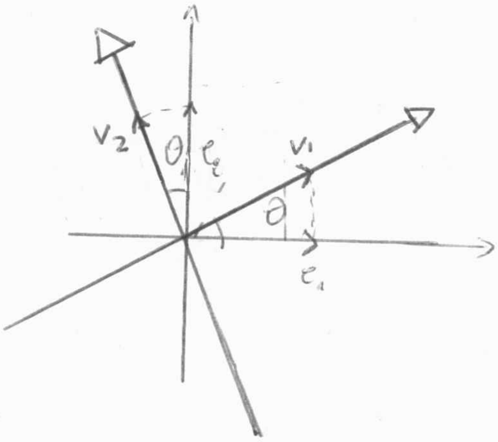
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

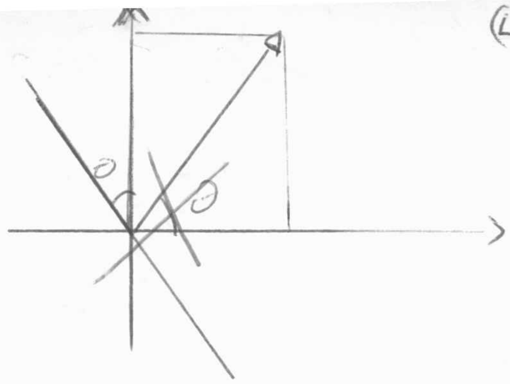
$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = M^{B_2}_{B_1}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio: Considero un cambiamento di base in $\mathbb{R}^2$ passo dalla base canonica ad una nuova base $\{v_1, v_2\}$ i cui vettori sono ottenuti ruotando i vettori della base canonica di un angolo θ

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ in verso antiorario





Determinare la matrice del cambiamento di coordinate.