"SPAZIO DELLE RELAZIONI" 26/11/2011

Dati $V_1, \dots, V_k$ vettori di uno spazio n-dimensionale V

$\Downarrow$

Cerchiamo lo spazio delle RELAZIONI dei vettori dati

Se i vettori sono L.I
$\Downarrow$
Spazio delle Relazioni é composto dal solo vettore nullo

Se i vettori sono LD, esso è composto ~~da~~ dalle relazioni TRA I VETTORI DATI. ~~dunque~~ ESSE SI TROVANO "~~generando~~ NEL MODO SEGUENTE:

$\Rightarrow$ Fissata una base B in V, siano $[V_1]_B, [V_2]_B, \dots, [V_k]_B$ i vettori delle coordinate nella base B data

$\Downarrow$ CONSIDERIAMO LA MATRICE A:

$$A = \left([V_1]_B \; [V_2]_B, \dots \; [V_k]_B \right), \quad A \in M_{n \times k}$$

$\Downarrow$

Il sistema Σ_0 associato sará $A \cdot X = 0$, con

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

<u>Spazio delle Relazioni é sol Σ_0</u>

EXEMPLUM

$$[V_1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad [V_2]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [V_3]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rgA = 2$$

$\Downarrow$

I 3 vettori dati sono L.D.

CONSIDERANDO LE COLONNE ~~DELLA~~ MATRICE RIDOTTA A GRADINI IN FORMA CANONICA si nota che $V_3 = V_1 + 2V_2$ (NELLA MATRICE INIZIALE)

$\Uparrow$

Relazione fondamentale tra i vettori dati

Dunque

$$Sol\ \Sigma_0 : \underbrace{\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}}_{} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow Sol_{generale} = (-x_3, -2x_3, x_3)$$

(Spazio ambiente 3-dimensionale, che dipende dal numero dei vettori dati.) [NB!]

$$Sol_{fondamentale} = (-1, -2, 1)$$

Il cui sottospazio é una retta, che ha come base la Sol. fondamentale.

In uno spazio $\underbrace{\text{n-dimensionale}}_{V}$, consideriamo U, W, suoi sottospazi.

$\Downarrow$

① $U \cap W$
② $U \cup W$
$\Big\}$ Sono sottospazi di V?

1) $U \cap W = \{ v \in V \mid v \in U, v \in W \}$

$\Downarrow$

Analizziamo le proprietà del sottospazio: PER VEDERE SE SONO SODDISFATTE:

- $0 \in W \cap U$, sì poiché $0 \in U$, $0 \in W$

- Siano $V_1, V_2 \in W \cap U$

$\Downarrow$

$V_1 + V_2 \in W \cap U$?

$\Downarrow$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} V_1, V_2 \in U \\ \hookrightarrow V_1 + V_2 \in U \end{array}\right\} \text{Idem per } W!}_{V_1 + V_2 \in W \cap U!}$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in U \cap W$

$\Downarrow$

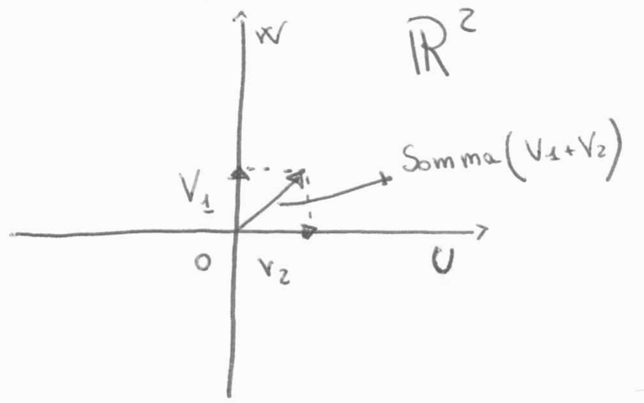
$\alpha V \in U \cap W$?

Sì, poiché $\alpha V \in U$ e $\alpha V \in W$

$\Rightarrow$ L'intersezione è sempre sottospazio vettoriale!

2) $U \cup W = \{ v \in V \mid v \in U \text{ oppure } v \in W \}$

CONTROESEMPIO



$V_1 + V_2 \notin U \cup W$!!

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \in U \cup W \\ V_2 \in U \cup W \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 + V_2 \in U \cup W ?$$

No!

$\Rightarrow$ Cerchiamo il più piccolo sottospazio vettoriale che contenga $U \cup W$.

Ovvero, riferendoci al "Controesempio" $\mathbb{R}^2$.

In generale tale sottospazio si indica con $U + W = \{ u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W \}$

Spazio somma

E LA DIMENSIONE?

$\dim(U + W) \leq n$

Segue

Teorema di Grassmann

Dati $U, W < V$

$$\Downarrow$$

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$$

DIMOSTRO

Siano

$\dim V = n$, $\dim U = p$, $\dim W = q$

$\boxed{\text{con } p, q \leq n}$

e $\dim(U \cap W) = K$, con $K \leq \min\{p, q\}$

$\Downarrow$

Considero base di $U \cap W$

$B_{U \cap W} = \{V_1, \dots, V_K\}$

$\Downarrow$ Estendo $B_{U \cap W}$ a B_U ed a B_W

$B_U = \{V_1, \dots, V_K, U_1, \dots, U_{p-K}\}$

$B_W = \{V_1, \dots, V_K, W_1, \dots, W_{q-K}\}$

$\Downarrow$

Sia $v \in U + W \Rightarrow \exists \; u \in U$ e $w \in W \,/\, v = u + w$

$$v = u + w = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \dots + a_K V_K + b_1 U_1 + \dots + b_{p-K} U_{p-K} +$$
$$+ c_1 V_1 + \dots + V_K \cdot c_K +$$
$$\boxed{+ d_1 w_1 + \dots + d_{q-K} W_{q-K}}$$

Donque

$$U + W = (a_1 + c_1) V_1 + \dots + (a_K + c_K) V_K + b_1 U_1 + \dots + b_{p-K} U_{p-K} + d_1 w_1 + \dots + d_{q-K} W_{q-K}$$

$\Downarrow$

$U+W$ é dato come combinazione lineare di

$\cancel{k} + p-\cancel{k} + q-k = p+q-k$ vettori

$\Downarrow$

Quindi $p+q-k$ vettori generano $U+W$ e se dimostriamo che quei vettori sono L.I. $\Rightarrow$ essi saranno base di $U+W$.

Perció, pongo:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-k} u_{p-k} + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{q-k} w_{q-k} = 0$$

$\Downarrow$

$$\sum_1^k \alpha_i v_i + \sum_1^{p-k} \beta_i u_i = -\sum_1^{q-k} \gamma_i w_i \quad = J$$

$\boxed{\text{ho un vettore } J \in U,\ J \in W}$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ il vettore dato sta in $V \cap W$

$\Downarrow$

$$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{q-k} w_{q-k} = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$$ (combinazione lineare dei vettori di base di $V \cap W$)

$\Downarrow$

$$0 = \underbrace{\sum_1^{q-k} \gamma_i w_i + \sum_1^{k} \delta_i v_i}_{\text{base di } W}$$

$\hookrightarrow \left[\begin{array}{l} \gamma_i = 0 \\ \delta_i = 0 \end{array}\right\} \forall i$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_1^k \alpha_i v_i + \sum_1^{p-k} \beta_i u_i = 0}_{\text{base di } U}$$

$\hookrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \end{array}\right] \forall i$

$\Rightarrow$ i $p+q-k$ vettori sono L.I

$\Downarrow$

sono base di $U+W$

$\Downarrow$ QED

$$\dim(U+W) = \left[\begin{array}{l} \dim(U) + \dim(W) \\ - \dim(U \cap W) \end{array}\right]$$

OVVERO

$$\dim(U+W) = p+q-k$$

ESEMPIO

$U, W < \mathbb{R}^3 \quad \dim U = \dim W = 2$

$\dim(U \cap W) = ?$

$\Downarrow$

$$\dim(U \cap W) = \underset{\underset{2}{\parallel}}{\dim(U)} + \underset{\underset{2}{\parallel}}{\dim(W)} - \underset{\underset{3}{\wedge\!|}}{\overset{\overset{2}{|\!\wedge}}{\dim(U+W)}}$$

POICHÈ $2 \leq \dim(U+W) \leq 3 \Rightarrow$

$$1 \leq \dim(U \cap W) \leq 2$$

$\Downarrow$ Se $U \neq W$ (una retta)

$\Downarrow$ Se $U \equiv W$ (un piano)

Se ho una base di U ed una di W

$\Downarrow$ COME DETERMINARE UNA base di $(U+W)$?

$\Uparrow$

I generatori di $U+W$ = generatori di U $\cup$ generatori di W

$\Downarrow$

Per ricercare la base scarto quelli LD!

$\Downarrow$

Metto i vettori in matrice e la riduco con Gauss. Le colonne L.IND. nella forma a gradini, sono L.IND. nella matrice di partenza: SONO I VETTORI DELLA BASE DI U+W!

Per una base di $U \cap W$, invece dovrò considerare le coordinate dei vettori LD nella matrice canonica.

Un vettore di base per $U \cap W$, sarà dato dalla combinazione lineare

DEI vettori DI BASE dello spazio iniziale U I CUI COEFFICIENTI SONO LE ENTRATE DEI VETTORI COLONNA LINEARMENTE DIPENDENTI NELLA MATRICE RIDOTTA A FORMA A GRADINI CANONICA

VEDIAMONE LA DIMOSTRAZIONE

Determinare una base del sottospazio SOMMA $U+W$ e determinare una base del sottospazio intersezione $U \cap W$ conoscendo le basi dei sottospazi U e W.

METODO OPERATIVO:

Siano $\mathcal{B}_U = \{f_1, \dots, f_p\}$ base di U e $\mathcal{B}_W = \{g_1, \dots, g_q\}$ base di W

Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} [f_1] & [f_2] & \cdots & [f_p] & [g_1] & [g_2] & \cdots & [g_q] \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono le coordinate dei vettori di base

Riduciamo la matrice nella forma a gradini canonica:

$$\begin{array}{c} \\ \\ p\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccccc} [e_1] & [e_2] & \cdots & [e_p] & [v_1] & \cdots & [v_k] & [e_{p+1}] & [v_{k+1}] & \cdots & [v_{k+s}] & [e_{p+2}] & \cdots & [e_r] & [v_{k+t}] & \cdots & [v_{q-(r-p)}] \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,k+s} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+t} & \cdots & a_{1,p+q-r} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2k} & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,k+s} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,k+t} & \cdots & a_{2,p+q-r} \\
\vdots & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & 1 & a_{p1} & & a_{pk} & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & & 0 & 1 & a_{p+1,k+1} & & a_{p+1,k+s} & 0 & & & & & \\
 & & & \vdots & & & & 0 & 0 & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & 0 & & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & & & & 0 & & 1 & a_{r,k+t} & & a_{r,p+q-r} \\
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Tale matrice dà subito i vettori colonne linearmente indipendenti, quelli canonici, e quindi le colonne corrispondenti nella matrice iniziale daranno una base di $U+W$, sottospazio generato dai vettori della base di U e dai vettori della base di W.; $U+W$ avrà dunque dimensione r.

Inoltre i vettori $v_1, v_2, \dots, v_{p+q-r}$ possono essere dati come combinazione lineare dei vettori canonici, ad esempio

$$v_j = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + \dots + a_{pj} e_p + a_{p+1\,j} e_{p+1} + \dots + a_{rj} e_r$$

$\forall j = 1, \dots, p+q-r$

Per l'equivalenza delle matrici si avrà dunque:

$$g_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{pj} f_p + a_{p+1,j}\, g_{i_1} + a_{p+2,j}\, g_{i_2} + \dots + a_{rj}\, g_{i_{r-p}}$$

dove il vettore colonna g_{i_1} corrisponde nella matrice iniziale al vettore colonna e_{p+1} della matrice finale, il vettore colonna g_{i_2} al vettore e_{p+2} e così via

Consideriamo $\forall j = 1, \dots, p+q-r$ le differenze

$$g_j - a_{p+1,j} g_{i_1} - a_{p+2,j} g_{i_2} - \dots - a_{rj}\, g_{i_{r-p}} = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{pj} f_j$$

questi vettori stanno in $U \cap W$, perché sono dati come combinazione lineare delle base di U e anche come combinaz. lineare delle base di W.; sono esattamente $p+q-r$

e per la relazione di Grassmann abbiamo

$$\dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim (U+W)$$

$\Rightarrow$ nel nostro caso

$$\dim (U \cap W) = p + q - r$$

Pertanto se dimostriamo che tali vettori sono linearmente indipendenti, abbiamo trovato la base cercata

Consideriamo $\sum_{j=1}^{p+q-r} \lambda_j \left(g_j - a_{p+1,j}\, g_{i_1} - a_{p+2,j}\, g_{i_2} - \dots - a_{rj}\, g_{i_{r-p}} \right) = 0$

Raccogliendo i vettori comuni a diversi addendi e scrivendo la sommatoria per esteso si ottiene

$$0 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_k g_k + \alpha_{i_1} g_{i_1} + \lambda_{k+1} g_{k+1} + \dots + \alpha_{i_2} g_{i_2} + \dots + \lambda_{p+q-r} g_{p+q-r}$$

Essendo $\{g_1, \dots, g_q\}$ base di $W \Rightarrow$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = \dots = \lambda_{p+q-r} = 0$$

e quindi i vettori su riportati sono linearmente indipendenti e danno una base di $U \cap W$.

c.v.d. ■

Possiamo dare i vettori come combinazione lineare della base di U nella forma

$$a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{pj} f_j \quad , j = 1, \dots, p+q-r$$

Tali coefficienti sono le prime p coordinate dei vettori colonna $[v_j]$ nella matrice ridotta a forma a gradini canonica.

Esempio: Determinare una base di $U \cap W$

dove $U = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$ e $W = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$

Costruiamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2 = R_2 - R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_3 = R_2 + R_3}{\underset{R}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix} \sim$$

$$R_2 = R_2 + R_3 \sim R_1 = R_1 - R_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Questa è la matrice ridotta

nella forma a gradini canonica

$\Rightarrow$ $U + W = \mathbb{R}^3$ poiché il rango è 3

$$U \cap W = \ll -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gg = \ll \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \gg .$$