25/02/13

Applicazioni tra spazi Vettoriali, applicazioni lineari ovvero morfismi tra spazi vettoriali (CIOE' APPLICAZIONI che mantengono la struttura dello spazio VETTORIALE)

RICORDIAMO LA DEFINIZIONE DI APPLICAZIONE LINEARE.

Def. Morfismo

Dati V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e sia $L: V \mapsto W$ allora L e' detta <u>app. lineare</u> se:

1. $\forall\, v_1 e\, v_2 \in V \quad L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

e

2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1)$

oppure se $\forall\, v_1, v_2 \in V$ e $\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)$$

Un applicazione e' lineare se e solo se l'immagine e' data da polinomi omogenei di 1° grado nelle coordinate del dominio

~~$L: V \mapsto W$ lineare~~ esempio $L: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longmapsto (2x,\, x+y,\, 3x-4y)$$

App. lineare da $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Associazione di una Matrice ad una app. lineare.

Se $L: V \mapsto W$ lineare, $\overbrace{\mathcal{B}_V \text{ e } \mathcal{B}_W}^{\text{si fissano le basi}}$ basi rispettivamente di V e W. $\Rightarrow v \in V$

e' dato come comb. lineare degli elementi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Rightarrow L(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(v_i)$ per la linearità

Dall' immagine degli n vettori di base posso conoscere LE IMMAGINI DI TUTTI i vettori del Dominio

posto $B_W = \{ w_1, \dots, w_k \} \Rightarrow L(v_i) = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}\, w_j \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$

è la Matrice associata ad L nelle basi date. E la indicheremo con

$$[L]^{B_W}_{B_V} \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$$

ogni colonna della matrice è formata dalle coordinate delle immagini dei vettori di base DEL DOMINIO ESPRESSE NELLA BASE DEL CODOMINIO

k, è la dimensione del Codominio W

n, è la dimensione del Dominio V

Esercizio: ~~...~~ Data $L : V \mapsto W$ lineare, $v \in V \Rightarrow L(v) \in W$

(da fare) $\Rightarrow$ fissate le basi B_V in V e B_W in W,

$$\underbrace{[L(v)]_{B_W}}_{\text{vettore espresso nelle coordinate della base del codominio.}} = [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [v]_{B_V}$$

Viceversa

Partendo da una Matrice associamo una applicazione lineare

Rispettive Basi

Data $A \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ posso considerare due spazi vettoriali $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k$ con $B_{\mathbb{R}^n}$ e $B_{\mathbb{R}^k}$

e dare una applicazione $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ nel seguente modo

Considerando $[v]_{B_{\mathbb{R}^n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}$ e pongo $L(x) = A \cdot X$

$$L(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = A_{k \times n} \cdot X_{n \times 1}$$

quindi $L : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^k$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

L è lineare: $L(\alpha_1 \tilde{x} + \alpha_2 \hat{x}) = \alpha_1 L(\tilde{x}) + \alpha_2 L(\hat{x})$

$$\Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \tilde{x}_1 + \alpha_2 \hat{x}_1 \\ \alpha_1 \tilde{x}_2 + \alpha_2 \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \alpha_1 \tilde{x}_n + \alpha_2 \hat{x}_n \end{pmatrix} = A\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \tilde{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \hat{x}_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= A \left(\alpha_1 \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} \right) = A \alpha_1 \tilde{X} + A \alpha_2 \hat{X} = \alpha_1 \underbrace{A\tilde{x}}_{L(\tilde{x})} + \alpha_2 \underbrace{A\hat{x}}_{L(\hat{x})}$$

Considero l'insieme $Hom(V,W) = \mathcal{L}(V,W) = \{ L : V \longmapsto W \ \ L \text{ lineare} \}$

TALE INSIEME È UNO SPAZIO VETTORIALE (DIMOSTRARLO PER ESERCIZIO)

$\Rightarrow$ Fissate le basi B_V e B_W posso considerare un'applicazione

$$\varphi : Hom(V,W) \longmapsto M_{k\times n}(\mathbb{R})$$
$$L_A \longmapsto [L]^{B_W}_{B_V}$$

$\Rightarrow \varphi$ è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali $Hom(V,W)$ e $M_{k\times n}(\mathbb{R})$

Isomorfismo, operaz. biettiva e lineare quindi

φ è biettiva perché se considero $\psi : M_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Hom(V,W)$ $\Rightarrow \psi$ è l'inversa di φ dal punto di vista insiemistico

$$A \longrightarrow L_A$$

quindi $\varphi \circ \psi = id_{M_{k\times n}}$ e $\psi \circ \varphi = id_{Hom(V,W)}$

CIOÈ SI DEVONO DIMOSTRARE LE SEGUENTI UGUAGLIANZE:

(Esercizio) $\varphi(\psi(A)) = A$ e (Esercizio) $\psi(\varphi(L)) = L$

Verifica — Verifica

quindi φ è biettiva e ψ è la sua inversa

φ è lineare: $\varphi(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) = \alpha_1 \varphi(L_1) + \alpha_2 \varphi(L_2)$

$\Longrightarrow$ COMINCIO CON LO DIMOSTRARE CHE LE MATRICI HANNO UGUALI LA PRIMA COLONNA: $(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(v_1)$

$$\varphi(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) = [\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2]^{B_W}_{B_V}$$

DEVO DIMOSTRARE CHE LE DUE MATRICI HANNO LE STESSE ENTRATE:

$$\alpha_1 \varphi(L_1) + \alpha_2 \varphi(L_2) = \alpha_1 [L_1]^{B_W}_{B_V} + \alpha_2 [L_2]^{B_W}_{B_V}$$

coincidono

$\alpha_1 L_1(v_1) + \alpha_2 L_2(v_1)$

[Poiché PER DEFINIZIONE DATE f e g FUNZIONI SI HA: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$]

$\Longrightarrow$ ESSENDO UGUALI I VETTORI IMMAGINE si deduce che le combinazioni lineari di questi due vettori nella base di W coincidono, allora le prime colonne delle due matrici coincidono. analogamente per ogni altra COLONNA

CIOÈ PER OGNI ALTRO v_j di B_V $\Rightarrow$ le due matrici coincidono.

SI HA $(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(v_j) =$
$= \alpha_1 L_1(v_j) + \alpha_2 L_2(v_j)$

$\Longrightarrow$ φ è lineare, quindi φ è un morfismo TRA SPAZI VETTORIALI

ESSENDO ANCHE BIETTIVA $\Rightarrow$ φ È ISOMORFISMO

quindi posso lavorare con la Matrice associata ad L come se LAVORASSI CON L;

Esercizio

fare vedere che $Hom(V, W)$ è uno spazio vettoriale

Per dimostrare che φ è un isomorfismo ho dovuto fissare le basi.

Se cambio basi DIVERSE dello spazio, cambia anche la matrice associata alla APPLICAZIONE ~~xxxxxxx~~ lineare.

Ho infinite $\underbrace{\text{matrici}}_{\text{le quali sono tutte dello stesso ordine}}$ associate alla stessa applicazione lineare.

POSTO $v = \sum x_i v_i$, SI HA DUNQUE:

$$w = L(v) = \sum x_i L(v_i) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\,L = \underbrace{\langle\langle L(v_1) \dots L(v_n) \rangle\rangle}$$

vettori immagine dei vettori di base di V

I vettori lin. indipendenti tra questi sono una base la cui cardinalità coincide con il rango della matrice associata.

DATA $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ E CONSIDERATI $L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_n)$, TRA QUESTI

$[L \text{ lineare}\} \Rightarrow$ i vettori lin. indipendenti mi danno una base di $\mathrm{Im}\,L$

il Rango di $[L]_{B_V}^{B_W}$ dà la dimensione di $\mathrm{Im}\,L$