22/05/13

Sia $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, [T]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & +1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} = A$

Qual'è la trasformazione geometrica definita da T?
↓
È UN'ISOMETRIA

1) T è un'isometria?

$[T]_{\mathcal{C}}$ è ortogonale? → vediamo se $A \cdot A^T = I$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & +1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & +1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} = I$$

$|A| = +1 \longrightarrow \exists\, B_{\perp_u}$ TALE CHE $[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix} \quad 0<\vartheta<\pi$

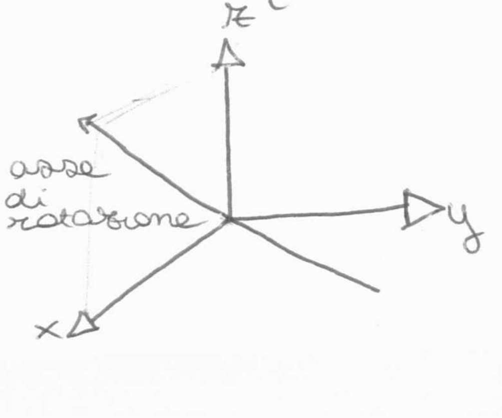
oppure $[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

- È una rotazione di angolo $\vartheta < \pi$ perché non è ortogonalmente diagonalizzabile
- L'asse di rotazione è dato dall'autospazio relativo all'autovalore +1 : CERCHIAMOLO:

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\boxed{\det = 0}$ → una delle righe è comb. lin. delle altre

$$\Rightarrow \begin{cases}-x+2y+z=0\\ -2x-2y+2z=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}2y = x-z\\ -2x-x+z+2z=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=z\end{cases}$$



Piano di rotazione:

ASSE DI ROTAZIONE $= r: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad \vec{u}=(1,0,1)$ parametri direttori

• l'equazione del piano $\perp r$ per O è $\boxed{x+z=0}$

$\rightarrow [T]_{B1n} = S^{-1}[T]_{C}S$

• S è formata dai vettori della base $B1n$
il primo vettore deve essere un versore dell'autospazio trovato

ad esempio: prendo $v=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \|v_1\|=\sqrt{2}$

$\rightarrow u_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

prendiamo $v_2 \in \pi \rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \|v_2\|=\sqrt{2} \rightarrow u_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

ora cerco $v_3 \in \pi, v_3 \perp v_2$

$v_3=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0=x+x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x=0 \end{cases}$

$\rightarrow v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow u_3=v_3 \rightarrow B1n=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\rightarrow S=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$

$S^{-1}=S^{T} \rightarrow \boxed{[T]_{B1n}=S^{T}[T]_{C}S}$

$\Rightarrow [T]_{B1n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \rightarrow$ determino $\cos\theta$

OPPURE CONSIDERIAMO CHE:

• La traccia di una matrice si mantiene per similitudine $\to$ $Tr([T]_{\mathcal{C}}) = Tr([T]_{\mathcal{B}in}) \to \frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 1 + 2\cos\vartheta$

$\to 2\cos\vartheta = \cancel{\frac{4}{3}}\ \frac{2}{3} \to \cos\vartheta = \frac{1}{3}$: CI SONO DUE ANGOLI $0<\vartheta<\pi$ con $\cos\vartheta = \frac{1}{3}$ A SECONDA DEL VERSO DI ROTAZIONE: UNO HA SENO POSITIVO ED UNO NEGATIVO $\Rightarrow$ TROVIAMO IL VERSO DI ROTAZIONE: CALCOLIAMO

$$\begin{array}{c}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ -1 & -1 & -1/3 \end{vmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \text{ASSE DI ROTAZ.} & \text{PIANO DI ROTAZ.} & \text{TRASFORMATO DEL VETTORE SCELTO NEL PIANO DI ROTAZIONE} \end{array}
\end{array}
\qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$= -\frac{8}{3}$ NEGATIVO, QUINDI ROTAZIONE IN SENSO ORARIO

SE IL DETERMINANTE È POSITIVO LA ROTAZIONE È ANTIORARIA!

$\sin\vartheta = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R \circ S$$

SE STIAMO STUDIANDO UNA MATRICE ORTOGONALE CON DETERMINANTE PARI A -1 $\Rightarrow$ PUÒ ESSERE LA COMPOSIZIONE DI UNA ROTAZIONE E DI UNO SPECCHIAMENTO, COME VISTO SOPRA NEL PRODOTTO TRA LE CORRISPONDENTI MATRICI.

IL PIANO DI ROTAZIONE È ALLORA ANCHE IL PIANO DI SPECCHIAMENTO E SI DEVONO CERCARE, COME PRIMA, TUTTE LE CARATTERISTICHE DELLA ROTAZIONE.