1

21/11/2012

Definizione: il Rango riga di una Matrice $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ è il # di vettori riga linearmente indipendenti di A ed è uguale alla dimensione dello spazio riga di A $[\dim \mathcal{R}(A)]$

- il Rango Colonna di una Matrice $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ è il # di vettori Colonna lin. indipendenti di A ed è uguale alla dimensione dello spazio colonna di A $[\dim \mathcal{C}(A)]$

Proposizione: il Rango riga di A = Rango Colonna di A = RANGO di A

Dimostrazione: Sia r = Rango A = # pivot della matrice ridotta a gradini ~~canonica~~ $\Longrightarrow$ Nella matrice in forma a gradini canonica $A' \Rightarrow \exists$ r colonne canoniche, ovvero:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} C_{i_1} & & & & C_{i_2} & & & & & & C_{i_r} & & \end{array} \\
A' = & \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & 0 & & 0 & 1 & * & \cdots & * & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & 0 & 0 & & 0 & & \vdots & & & \vdots \\
 & & & & \vdots & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & & & & & & & & & 0 & & & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\Rightarrow \exists\ r \text{ colonne lin. indipendenti (ovvero quelle canoniche)}$$

r-esima riga

$\Rightarrow$ il Rango (COLONNA) di $A' = r$ $\Rightarrow$ dimostriamo che esattamente r righe di A' sono lin. indipendenti: per come è fatta A' è evidente che il # minimo di Righe lin. indipendenti è r. (LE ULTIME $n-r$ RIGHE SONO NULLE)

- Dimostriamo che le r righe che contengono i pivots sono lin. indip.

$\rightarrow$ Considero $a_1 R_1(A') + a_2 R_2(A') + \ldots + a_r R_r(A') = 0$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ * \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i_2 \\ \\ \\ \\ \leftarrow i_3 \\ \\ \\ \\ \leftarrow i_r \\ \\ \end{array}
+ a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ * \end{pmatrix}
+ a_r \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ i_2 \rightarrow \\ \\ i_3 \rightarrow \\ \\ i_r \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_1 \\ * \\ \vdots \\ * \\ a_2 \\ * \\ \vdots \\ * \\ a_3 \\ * \\ \vdots \\ * \\ a_r \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$$

$\Rightarrow$ LE r RIGHE $R_j(A')$ SONO LINEARMENTE INDIP.

$\Rightarrow \dim \mathcal{R}(A') = r = \text{rango riga } A' = \text{rango riga } A$

c.v.d.

<u>Proposizione</u>: la forma canonica a gradini di una matrice A è unica.

Dimostrazione [per assurdo]: supponiamo che esistono due matrice in forma canonica a gradini per una matrice A $\Rightarrow$ supponiamo che B e B' siano tali che $A \sim B$ e $A \sim B'$ e B e B' ~~sono~~ siano forme a gradini canoniche $\Rightarrow$ voglio dimostrare che $B = B'$.

$\Rightarrow$ Essendo $B \sim B'$ hanno gli stessi vettori colonna canonici <u>nelle stesse posizioni</u>.

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2 - R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-2R_2 + R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{2R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$ da finire $\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Consideriamo gli spazi riga $\mathcal{R}(B)$ ed $\mathcal{R}(B')$, essi sono uguali quindi $R_i(B) \in \langle R_1(B'), \dots, R_k(B') \rangle \Rightarrow R_i(B) = a_1 R_1(B') + \dots + a_k R_k(B')$ facendo la somma indicata troverò $\underbrace{(a_1, * \dots *, a_2, * \dots *, a_3, * \dots *, a_r, * \dots *)}_{\ }$

3 Uguagliandolo ad $R_i(B)$ ~~[illegible]~~ otteniamo:

$a_1 = a_2 = \dots = a_{i-1} = 0$, $a_i = 1$, $a_{i+1} = \dots = a_k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_i(B) = R_i(B')$ {appunto perché a_i sono tutti nulli eccetto $a_i = 1$}

$\hookrightarrow R_i(B) = a_i R_i(B') = 1 \cdot R_i(B')$

$$\left\{ R_i(B) = 0 \cdot R_1(B') + \dots + 0 \cdot R_{i-1}(B') + 1 R_i(B') + \dots + 0 R_k(B') \right\}$$

Per questa dimostrazione $B = B'$, perciò esiste solo una matrice in forma canonica a gradini!

c.v.d.

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ed è invertibile $\Rightarrow$ la sua forma canonica è I_n

Matrice identità

~~diagonale~~

Completamento di una base: dati p vettori $v_1, \dots, v_p$ in uno spazio n-dimensionale con $p < n$, vogliamo aggiungere vettori a quelli dati fino ad ottenere una base di $\mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$ {Spazio di dimensione n qualunque}

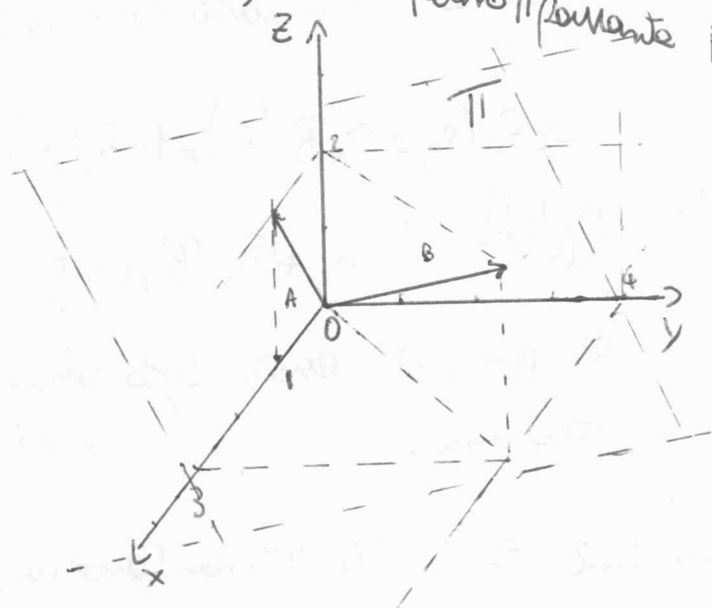
Costruiamo una matrice mettendo in colonna le coordinate dei p vettori dati
$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{np} \end{pmatrix}$$
e aggiungiamo I_n in modo da formare una matrice $n \times (p+n)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1p} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2p} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{np} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{il rango di } A \text{ è } n$$

$\Rightarrow$ Nella matrice a gradini ad essa equivalente, le colonne lin. indip. sono quelle dei pivot $\Rightarrow$ quelli corrispondenti in A danno la base cercata.

④ esercizio:

$A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$ → siccome sono lin indip. generano un piano π passante per $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s+3t \\ y = 4t \\ z = 2s+2t \end{cases}$$

→ eq parametrica di π
↓
del piano generato dai due vettori

ricaviamo eq. cartesiana:
(DA DUE EQUAZIONI SI RICAVANO I PARAMETRI s E t E SI SOSTITUISCONO NELLE RIMANENTI)

$$\Rightarrow \begin{cases} t = y/4 \\ s = x - \frac{3}{4}y \\ \boxed{z = 2x - \frac{3}{2}y + \frac{y}{2}} \end{cases} \Rightarrow z - 2x + y = 0$$

OPPURE SI IMPONE ALLA MATRICE AVENTE PER COLONNE I K VETTORI DATI ED UN VETTORE QUALUNQUE DELLO SPAZIO CERCATO, DI NON AVERE RANGO K+1

1) $$\det\begin{pmatrix}1&3&x\\0&4&y\\2&2&z\end{pmatrix} = 4z - 2y + 2(3y - 4x) = 0 \Rightarrow z - 2x + y = 0$$

OPPURE:

2) $$\begin{pmatrix}1&3&x\\0&4&y\\2&2&z\end{pmatrix} \overset{2R_1 - R_3}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&x\\0&4&y\\0&4&2x-y\end{pmatrix} \overset{R_2 - R_3}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&x\\0&4&y\\0&0&y-2x+z\end{pmatrix}$$

Modi per ottenere l'equazione cartesiana del piano π