Strutture algebriche

Dati tre insiemi A, B, C si definisce OPERAZIONE BINARIA ogni applicazione $\varphi : A \times B \longrightarrow C$

se $A = B = C \Rightarrow \varphi : A \times A \longrightarrow A$ è detta INTERNA

Esempio "$+$": $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; "$\cdot$": $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

SOMMA : $(m,n) \longmapsto m+n$; $(m,n) \longmapsto m \cdot n$: PRODOTTO

Una struttura algebrica è una n-upla costituita da un insieme e operazioni su di esso.

~~[illegible]~~

Sia G un insieme e "$*$" un'operazione sull'insieme G. Consideriamo le più semplici strutture algebriche in G:

$(G,*)$ è detta GRUPPOIDE se l'unica proprietà cui soddisfa $*$ è quella associativa: $a_1 * (a_2 * a_3) = (a_1 * a_2) * a_3$

Definizione : Una struttura algebrica $(G, *)$ si dice GRUPPO se:

1) $*$ è associativa
2) $\exists$ elemento neutro cioè un elemento $e \mid e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
3) ogni elemento è invertibile cioè $\forall x \in G \ \exists x' \mid x * x' = x' * x = e$

Il gruppo $(G, *)$ è COMMUTATIVO (o ABELIANO dal nome del matematico norvegese ABEL) se l'operazione è commutativa

Se indichiamo l'operazione con "$+$" $\Rightarrow (G, +)$ si dice gruppo additivo. Se è "$\cdot$", si dice moltiplicativo

Esempi: 1) $(\mathbb{Z},+)$ è gruppo abeliano

2) $(\mathbb{Q},+)$ " " "

3) $(\mathbb{N},+)$ non è un gruppo

4) Sia $X = \{u, a, b, c\}$ e definiamo una operazione interna mediante la tabella

$\circ$	u	a	b	c
u	u	a	b	c
a	a	u	c	b
b	b	c	u	a
c	c	b	a	u

$(X,\circ)$ è un gruppo abeliano: il GRUPPO DI KLEIN

Se $(G,+)$ è gruppo è possibile definire una operazione interna detta SOTTRAZIONE come $(x+(-y)) = x-y$

Se $(G,\circ)$ è gruppo $\Rightarrow$ si definisce una nuova operazione la DIVISIONE: $x : y = x \circ y^{-1}$.

DEFINIZIONE: Dotiamo un insieme A di due operazioni "+" e "$\circ$" $\Rightarrow$ la struttura $(A;+,\circ)$ è un ANELLO

se: 1) $(A,+)$ è gruppo abeliano

2) il prodotto è associativo

3) $\forall x,y,z \in A$ $(x+y)\cdot z = xz + yz$
e $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

Se il prodotto è commutativo $\Rightarrow$ l'anello si dice COMMUTATIVO,

L'anello $(A;+,\circ)$ è detto UNITARIO se $(A,\circ)$ ha elemento neutro

Definizione Dato un insieme K, la struttura $(K;+,\circ)$ è un **CORPO**

se: 1) $(K,+)$ è gruppo abeliano

2) $(K \setminus \{0\},\circ)$ è gruppo

3) Il prodotto è distributivo rispetto alla somma

Se il prodotto gode della proprietà commutativa $\Rightarrow$ il corpo $(K;+,\circ)$ è detto CAMPO

Esempi di campi:

1) L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto è un campo

2) L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con le usuali operazioni di somma e prodotto è un campo

3) L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con l'operazione di somma; $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d) \Rightarrow z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$, e di moltiplicazione, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, bc + ad)$, è un campo