$A \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$ Se R_j sono le righe di $A \Rightarrow$ considero lo SPAZIO RIGA DI A: ①

$\mathcal{R}(A) = \langle\langle R_1, \dots, R_k \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

DIMOSTRIAMO CHE $\mathcal{R}(A)$ È SOTTOSPAZIO VETTORIALE:

1) $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow 0 \in \langle\langle R_1, \dots, R_k \rangle\rangle$ perché $0 = 0R_1 + 0R_2 + \dots + 0R_k$

ESEMPIO DI SPAZIO RIGA:

$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ Considero $R_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $R_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{R}(A) = \langle\langle R_1, R_2, R_3 \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$

2) Dati $v_1, v_2 \in \mathcal{R}(A) \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathcal{R}(A) \Rightarrow$ SIANO: $v_1 = \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_k R_k$,

$v_2 = \beta_1 R_1 + \dots + \beta_k R_k \Rightarrow$

$v_1 + v_2 = \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_k R_k + \beta_1 R_1 + \dots + \beta_k R_k = (\alpha_1 + \beta_1) R_1 + \dots + R_k(\alpha_k + \beta_k) \in \mathcal{R}(A)$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v_1 \in \mathcal{R}(A)$ infatti $\lambda(\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_k B_k) =$

$\lambda\alpha_1 R_1 + \lambda\alpha_2 R_2 + \dots + \lambda\alpha_k R_k \in \langle\langle R_1, \dots, R_k \rangle\rangle \Rightarrow \langle\langle R_1, \dots, R_k \rangle\rangle$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$

$rg\, A = \#$ vettori (righe o colonne) di A linearmente indipendenti $\leq \min\{k, n\}$

$\Rightarrow r = \dim R(A)$

Le operazioni elementari riga non cambiano il rango di matrici equivalenti $\Rightarrow A' \sim A \Rightarrow \dim R(A') = \dim R(A)$

Se $A' \sim A \Rightarrow R(A') \equiv R(A)$? DIMOSTRIAMO CHE: $\boxed{\text{a) } R(A') \subset R(A) \quad \text{e} \quad \text{b) } R(A) \subset R(A')} \Rightarrow$

ES: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{2R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = A'$

a) $\langle\langle R_1(A'), \dots, R_k(A') \rangle\rangle \subset \langle\langle R_1(A); R_2(A), \dots, R_k(A) \rangle\rangle \Rightarrow$ È SUFFICIENTE

DIMOSTRARE CHE $R_j(A') \in \mathcal{R}(A)\ \forall j \Rightarrow$ dimostro che $R_1(A') \in \langle\langle R_1(A), \dots, R_k(A) \rangle\rangle$

CONSIDERO LE OPERAZIONI ELEMENTARI CHE DETERMINANO $R_1(A')$

1) $R_1(A') = \lambda R_1(A) \Rightarrow R_1(A) \in \langle\langle R_1(A), \dots, R_k(A) \rangle\rangle$

2) $R_1(A') = \alpha_1 R_1(A) + \alpha_2 R_j(A) \Rightarrow R_1(A') \in \langle\langle R_1(A), \dots, R_k(A) \rangle\rangle$

b) $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(A') \Rightarrow R_j(A) \in \langle\langle R_1(A'), \dots, R_k(A') \rangle\rangle$ POICHÉ $R_j(A)$ SI OTTIENE DA $R_1(A'), \dots, R_k(A')$ CON LE STESSE OPERAZIONI ELEMENTARI. cvd

SIA $A \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$: studiamo $\mathcal{C}(A) = \langle\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^k$ dove

$C_j(A)$ è la j-esima colonna di A

$\dim \mathcal{C}(A) \leq \min\{k, n\} = \#$ vettori C_j lin indipendenti $=$

$= \dim \mathcal{R}(A)$

Facciamo vedere, con un contro esempio, che $\mathcal{C}(A') \neq \mathcal{C}(A)$ se $A' \sim A$

Considero $\mathcal{C}(A) = \langle\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle\rangle$ e $\mathcal{C}(A') = \langle\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle\rangle$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 2 \\ 4\alpha + 5\beta = 0 \\ 6\alpha + 7\beta = 6 \end{cases} \begin{cases} 2\alpha = 2 - 3\beta \\ 4 - 6\beta + 5\beta = 0 \\ 6 - 9\beta + 7\beta = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 4 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

impossibile

<u>proposizione</u>: Sia $A' \sim A$, $A, A' \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ se due colonne $C_i(A')$ e $C_j(A')$ sono lin. indipendenti $\Rightarrow C_i(A)$ e $C_j(A)$ sono lin. indip

2) se una colonna di A', $C_j(A')$ è data da $C_j(A') =$

$\alpha_1 C_1(A') + \alpha_2 C_2(A') + \dots + \alpha_n C_n(A') \Rightarrow C_j(A) = \alpha_1 C_1(A) + \dots + \alpha_n C_n(A)$

<u>Dimostrazione</u>: 1) Pongo $\alpha C_i(A) + \beta C_j(A) = 0 \Rightarrow$

Ricordo che $AX = 0$ si può scrivere anche così

$x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A) = 0$. Nel nostro caso

Nel nostro caso $\alpha C_i(A) + \beta C_j(A) = 0$

si può scrivere $0 C_1(A) + 0 C_2(A) + \dots + \alpha C_i(A) + 0 C_{i+1}(A) + \dots + \beta C_j(A) + 0 C_{j+1}(A)$

$+ \dots + 0 C_n(A) = 0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \in Sol(AX=0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in Sol(A'X=0) \Rightarrow$

$\alpha C_i(A') + \beta C_j(A') = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ perchè $C_i(A')$ e $C_j(A')$ sono

l. indipendenti

$\Rightarrow C_i(A)$ e $C_j(A)$ sono l. indip

2) Siano $C_{i_1}(A'), C_{i_2}(A'), \dots, C_{i_l}(A'), C_{i_{l+1}}(A')$ colonne di A' tali che $C_{i,l+1}(A') = \alpha_1 C_i(A') + \alpha_2 C_{i_2}(A') + \dots + \alpha_l C_{i_l}(A')$ con almeno un $\alpha_j \neq 0$

$\alpha_1 C_{i_1}(A') + \dots + \alpha_l C_{i_l}(A') - C_{i_{l+1}}(A') = 0 \Rightarrow A' \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_l \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(0, \dots, 0, \alpha_1, 0 \dots \alpha_2, 0 \dots, \alpha_l, 0 \dots 0, -1, 0 \dots 0) \in Sol(A'X=0)$

$\Rightarrow (0, \dots 0, \alpha_1, 0 \dots \alpha_2, 0, \dots, \alpha_l, 0 \dots, -1, 0 \dots 0) \in Sol(AX=0)$

$\Rightarrow C_{i_{l+1}}(A) = \alpha_1 C_{i_1}(A) + \alpha_2 C_{i_2}(A) + \dots + \alpha_l C_{i_l}(A)$

c.v.d

ESEMPIO

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ = la matrice ridotta a forma canonica a gradini a partire da una matrice $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ sappiamo che le prime due colonne di A sono linearm. indipendenti e la 3ª colonna di A, $C_3(A) = 2C_1(A) + 3C_2(A)$