Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, ne cerchiamo la potenza n-esima. (Ad esempio A^{1228})

$\Downarrow$

Se A é diagonale $A = D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

A^2 é diagonale e del tipo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{22}^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^2 \end{pmatrix} = A \cdot A$$

$\Downarrow$

Prodotto RiCo

Generalizzando A^n é diagonale e le sue entrate sono tutte elevate alla n.

$\Downarrow$

Ció vale $\forall n \in \mathbb{R}$

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizzabile.

$$\Downarrow$$

$\exists$ D diagonale ed S $(|S| \neq 0)$

tale che $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$

$\Rightarrow S \cdot D \cdot S^{-1} = A$

$$\Downarrow$$

$$A^n = (S \cdot D \cdot S^{-1})^n = (S \cdot D \cdot S^{-1})(S \cdot D \cdot S^{-1}) \cdot \ldots \cdot (S \cdot D \cdot S^{-1})$$

$\Downarrow$ Sfruttando l'associatività ed il fatto che $S^{-1} \cdot S = I$

$$A^n = S \cdot D^n \cdot S^{-1}$$

Se $A \simeq B \Rightarrow$ le due matrici sono associate all'operatore $T: V \to V$ in basi $\neq$

$$\Downarrow$$

$B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ si traduce in composizione degli operatori associati alle matrici A, B, S, S^{-1}

$$\begin{array}{ccccl} (V, B_1) & \xrightarrow{T} & (V, B_1) & \Leftarrow & [T]_{B_1} = A \\ id_1 \uparrow & & \downarrow id_2 & & \\ (V, B_2) & \xrightarrow{T} & (V, B_2) & \Leftarrow & [T]_{B_2} = B \end{array}$$

$\Downarrow$

$T = id_2 \circ T \circ id_1$

$$[T]_{B_2} = [id_2]_{B_1}^{B_2} \circ [T]_{B_1} \circ [id_1]_{B_2}^{B_1} =$$

$$= \left([id_1]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [id_1]_{B_2}^{B_1} =$$

$$= S^{-1} \circ A \circ S = B$$

$\Downarrow$

S é la matrice di cambiamento di base

$\Downarrow$

Supponiamo $\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}{\overset{A}{\cap}}$ diagonalizzabile

$$
\begin{aligned}
T: V &\longrightarrow V \\
v &\longmapsto A(v)
\end{aligned}
$$

} Si suppone che A sia nella base canonica

$\Downarrow$

D é associata in una base B di autovettori per T

$\Downarrow$

Chi é S? (NB $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$)

$\Downarrow$

$$S = [id]_B^{e}$$

$\Downarrow$

S é la matrice che ha per colonne le coordinate degli autovettori di B

EXEMPLUM

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

é diagonalizzabile?

Se sì, determina D ed S

(tali che $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$)

$\Downarrow$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & -3-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)\Big((-3-\lambda)(4-\lambda) + 12\Big) +$$

$$+ \left(\cancel{12} - 3\lambda \cancel{-12}\right) + 2\left(\cancel{-6} + \cancel{6} + 2\lambda\right) =$$

$$= (1-\lambda)\left(\cancel{-12} + 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 \cancel{+12}\right) + \lambda =$$

$$= \lambda^2 (2-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 0 \quad \mu(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad E_0 : x - y + 2z = 0$

$\dim E_0 = 2$

$\lambda_2 = 2 \quad \mu(2) = 1$

$\boxed{A \text{ é diagonalizzabile}}$

Proposizione

$|A| = 0 \iff 0$ é autovalore di A

"$\Rightarrow$" DIMOSTRIAMO CHE $|A|$ È IL TERMINE NOTO DEL POLINOMIO CARATTERISTICO:

INFATTI PONIAMO $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$: CALCOLIAMO

$$P_A(0) = |A - 0I| = |A| = \text{TERMINE NOTO DI } P_A(\lambda)$$

$\Rightarrow$ SE $|A| = 0 \Rightarrow$ IL TERMINE NOTO È NULLO

$\Rightarrow$ SI PUÒ RACCOGLIERE λ A FATTORE DEL POLINOMIO $\Rightarrow \lambda = 0$ È RADICE DEL POLINOMIO

$\Rightarrow$ 0 È AUTOVALORE

"$\Leftarrow$"

$\lambda = 0$ autovalore

$\Downarrow$

$$p(\lambda) = 0 = |A - \lambda I| = |A - 0I| =$$

$$= \underline{\underline{|A| = 0}}$$

$\square$

NOTIAMO CHE ABBIAMO DIMOSTRATO IL SEGUENTE FATTO:

Il termine noto di un $p(\lambda)$ é sempre = al determinante della matrice a cui $p(\lambda)$ é associato

Riprendo EXEMPLUM

A diagonalizzabile

$$\Downarrow$$

$$\exists\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S = ? Da fare ...