In $\mathbb{R}^3$ abbiamo come sottospazi vettoriali / affini punti, rette e piani.

* rette in $\mathbb{R}^3$: sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ 1-dimensionali

Eq. Cartesiana: $\Sigma: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ con $rg\,\Sigma = 2$

per ricavare l'eq. parametrica si deve risolvere Σ: risolvendo Σ, troviamo $Sol(\Sigma_0)$

- $Sol(\Sigma_0) = \{ t(x_0, y_0, z_0), t \in \mathbb{R} \}$
  - dove t è PARAMETRO REALE
  - dove $t(x_0, y_0, z_0)$ È LA soluzione generale
  - e (x_0, y_0, z_0) È SOLUZIONE FONDAMENTALE DI Σ_0
- troviamo anche una soluzione particolare di Σ: $(x_1, y_1, z_1) \to Sol\,\Sigma = \{(x_1,y_1,z_1) + t(x_0,y_0,z_0), t \in \mathbb{R}\}$

cioè $(x,y,z) \in Sol\,\Sigma \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t x_0 \\ y = y_1 + t y_0 \\ z = z_1 + t z_0 \end{cases}$ eq. parametrica di r su $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ sono i parametri direttori di r
[solitamente indicati con (l, m, n)]

- DUE RETTE IN $\mathbb{R}^3$ SONO PARALLELE SE I LORO PARAMETRI DIRETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI: $\frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}$

* Piani in $\mathbb{R}^3$: sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ bi-dimensionali

Eq. cartesiana $\Sigma: ax + by + cz + d = 0$ $\quad rg\,\Sigma = 1$

Si ricava l'eq. parametrica risolvendo $\Sigma \Rightarrow Sol\,\Sigma \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + s(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + t(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ con $s,t \in \mathbb{R}\}$

s,t: parametri
$\underset{\tilde{V}}{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}, \underset{\hat{V}}{(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}$: soluzioni fondamentali DI Σ_0

(x_1, y_1, z_1) SOLUZIONE PARTICOLARE DI Σ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$ eq. vettoriale $\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + s\tilde{x} + t\hat{x} \\ y = y_1 + s\tilde{y} + t\hat{y} \\ z = z_1 + s\tilde{z} + t\hat{z} \end{cases}$ eq. parametrica di π

$\tilde{V}$ e $\hat{V}$ sono sol. fondamentali di $\Sigma_0 \Rightarrow$ sono base di π_0, perché ~~[illegible]~~ GIACITURA DI π.

- Due piani π_1 e π_2 sono paralleli SE HANNO LA STESSA GIACITURA O DIREZIONE CIOÈ se $\tilde{V}_1, \hat{V}_1, \tilde{V}_2, \hat{V}_2$ sono linearmente dipendenti A 3 A 3. (A) CIOÈ (I PARAMETRI DIRETTORI)

oppure data l'eq. cartesiana $ax+by+cz+d \Rightarrow$ ricaviamo la direzione da $ax+by+cz=0$; la direzione/giacitura è la stessa $\Leftrightarrow \pi_1 // \pi_2$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow \pi_1 // \pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

~~(se è proporzionale)~~

(A) $\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}_{\pi_1} & \hat{x}_{\pi_1} & \tilde{x}_{\pi_2} & \hat{x}_{\pi_2} \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_{3\times 4}$ (I determinanti delle SOTTOMATRICI 3x3 dev'essere $=0$) $\Rightarrow$ il rango della matrice deve essere $=2$

UNA ~~RETTA E UN PIANO SONO PARALLELI IN $\mathbb{R}^3$ SE:~~

Definizione:

- due sottospazi affini di diverse dimensione sono paralleli se la direzione del sottospazio di dimensione inferiore è contenuta nella direzione del sottospazio di dimensione maggiore

Retta // piano in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ direzione $r \subset$ direzione π, cioè $r_0 \subset \pi_0$

se $r: X = X_1 + s\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ e $\pi: ax+by+cz+d=0$

$$\boxed{r // \pi \Leftrightarrow al+bm+cn=0}$$

17/12/2012 **3**

Sia $r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ affinché il sistema dia una retta il $rg\,\Sigma = 2$ (rg matrice coeffic)

infatti: se $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$

- $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ 2 piani paralleli (coincidenti) [UNO STESSO PIANO]
- $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ 2 piani paralleli NON COINCIDENTI

Sapendo che deve avere rango 2 si considerano tutti i minori 2×2 e si ottengono i parametri direttori della retta: $l = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $m = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

[NB: i parametri direttori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa
$l = t\det(\ )$, $m = t\det(\ )$, $n = t\det(\ )$]

---

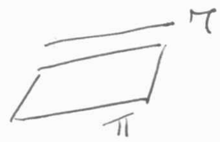
per vedere se $r // \pi$ date le eq. Cartesiane: ~~rg completa ≤ rg coeffic~~ CONSIDERIAMO:

$$\begin{array}{c} r \\ \\ \pi \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{array}\right) \Longrightarrow \text{se } rg\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}}_{A} = 2 \Rightarrow$$

$\hookrightarrow \det A = 0$

Se $rg\,A = rg(A|B) = 2 \Rightarrow r // \pi$, $r \subset \pi$

Se $rg\,A < \underset{3}{rg(A|B)} \rightarrow r // \pi$, $r \not\subset \pi$



DETERMINARE :

- CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI **3** PUNTI ; , Eq DI RETTE/PIANO PASSANTE PER 2/3 PUNTI IN $\mathbb{R}^3$;
- " " COMPLANARITÀ DI 4 PUNTI