TEOREMA DI SYLVESTER:

Data una forma bilineare reale $F: V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ B_S$ F-ortogonale tale che $[F]_{B_S} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Il numero di elementi positivi e negativi sulla diagonale è ~~ia~~ invariante per la forma bilineare F e conseguentemente per la forma quadratica ad essa associata.

__Dim__: I parte) Sappiamo già (abbiamo già dimostrato) che data F, $\exists$ una base B di V F-ortogonale $\Rightarrow [F]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{jj} & \\ 0 & & & & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

Suppongo $\dim V = n$.

Ora supponiamo che $\operatorname{rg} F = r$, e il # di elementi positivi a_{ii} sia p ed il ~~##~~ # di elementi negativi sulla diagonale sia $q = r - p$.

A meno di riordinare gli elementi della base B, supponiamo che i primi p elementi siano positivi, i successivi q elementi siano negativi ed i rimanenti $n-r$ nulli $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ essendo le entrate della matrice reali, possiamo porre $a_{ii} = \alpha_i^2$ per $i = 1, \dots, p$, $-a_{jj} = \beta_j^2$ per $j = p+1, \dots, p+q$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Consideriamo la base $B = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}, v_{p+q+1}, \dots, v_n\}$ e prendo i vettori $w_i = \dfrac{v_i}{\alpha_i}$, per $i = 1, \dots, p$, $w_j = \dfrac{v_j}{\beta_j}$, per $j = p+1, \dots, p+q$,

$w_k = v_k$, per $k = p+q+1, \dots, n \Rightarrow$

$\Rightarrow B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ è ancora base di V F-ortogonale.

Inoltre $[F]_{B'} = \begin{pmatrix} b_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & b_{pp} & & \\ & & & b_{p+1,p+1} & \\ 0 & & & & \ddots & b_{nn} \end{pmatrix}$ • con $b_{ii} = F((w_i, w_i)) = F\left(\left(\dfrac{v_i}{\alpha_i}, \dfrac{v_i}{\alpha_i}\right)\right) = \dfrac{1}{\alpha_i^2} F((v_i, v_i)) = \dfrac{\alpha_{ii}^2}{\alpha_i^2} = 1$ per $\forall\ i = 1, \dots, p$.

• per $j = p+1, \dots, q+p \Rightarrow b_{jj} = F((w_j, w_j)) = F\left(\left(\dfrac{v_j}{\beta_j}, \dfrac{v_j}{\beta_j}\right)\right) = \dfrac{1}{\beta_j^2} F((v_j, v_j)) = -\dfrac{\beta_{jj}^2}{\beta_j^2} = -1$

I

• per $k = p+q+1, \dots, n \Rightarrow$

$\Rightarrow b_{kk} = F((w_k, w_k)) = F((v_k, v_k)) = 0$

pertanto la matrice risulta

$$[F]_{B'} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \ddots 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 \ddots -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \ddots 0 \end{array}\right)$$

Dimostriamo che l'invarianza di p e q così determinati:

parte II: il rango r è invariante per $F \Rightarrow$ essendo $q = r - p$, basta dimostrare l'invarianza di p.

Per assurdo supponiamo che esistano due basi F-ortogonali $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$, rispetto alle quali siano:

• p il numero di elementi positivi sulla diagonale di $[F]_{B_1}$ e

t " " " " " " " " $[F]_{B_2}$,

con $p \neq t$ (per assurdo).

Supponiamo $p > t \Rightarrow$ considero $U = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$ e $W = \langle\langle w_{t+1}, \dots, w_n \rangle\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim U + \dim W = p + n - t > n \Rightarrow U \cap W$ deve essere $\neq \{0\}$.

Se $v \in U \cap W$ e $v \neq \{0\}$, $\Rightarrow v \in U \Rightarrow F((v, v)) > 0 \Rightarrow$ infatti

$$\Rightarrow F\left(\left(\sum_{i=1}^{p} x_i v_i, \sum_{i=1}^{p} x_i v_i\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0$$

INOLTRE ~~dunque~~ $v \in W \Rightarrow F((v, v)) = F\left(\left(\sum_{j=t+1}^{n} y_j w_j, \sum_{j=t+1}^{n} y_j w_j\right)\right) =$

$$= \sum_{j=t+1}^{t+q'} y_j^2 F((w_j, w_j)) =$$

$$= \sum_{j=t+1}^{t+q'} -y_j^2 =$$

$$= -\sum_j y_j^2 < 0$$

ASSURDO

poiché ho supposto $p > t$.

Allora suppongo $t > p \Rightarrow$ svolgendo il medesimo ragionamento adattato alla nuova Hp, si avrà nuovamente all'

ASSURDO

$\Rightarrow p = t$

c.v.d.

Tale teorema è detto anche LEGGE di INERZIA per le FORME QUADRATICHE REALI-

Il $\#\, p$ così trovato è detto INDICE POSITIVO di INERZIA;
Il $\#\, q$ è detto INDICE NEGATIVO di INERZIA. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ La coppia (p, q) caratterizza dunque le forme quadratiche ed è detta SEGNATURA della FORMA QUADRATICA.

Definizione: Chiamiamo MINORI PRINCIPALI di NORD-OVEST di ordine k, con $k \leq$ ordine della matrice, i determinanti delle sottomatrici costituite dalle prime k-righe e k-colonne della matrice data.

Esempio: posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Il minore principale di NORD-OVEST:

- di ordine 2 è $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$;
- di ordine 3 è $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$;

La definizione vale anche per matrici non quadrate, del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Teorema (di Jacobi): Sia $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma quadratica reale, e sia $\mathcal{B}$ una base di V, e $[Q]_{\mathcal{B}} = (a_{ij}) = A \Rightarrow$ detti d_k i minori principali di NORD-OVEST di A di ordine $k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se supponiamo $d_k \neq 0 \ \forall k = 1, \dots, (\dim V - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ una base $\mathcal{B}_1$ di V rispetto alla quale la matrice

$$[Q]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & & & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_3}{d_2} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{d_n}{d_{n-1}} \\ 0 & & & 0 & \end{pmatrix}$$

Se Q è forma quadratica definita positiva su uno spazio n-dimensionale $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la sua segnatura è $(n, 0)$, ed esiste una base di V tale che

$[Q]_B = I$ (matrice identità).

Corollario 1) Se tutti i minori principali di NORD-OVEST sono positivi =>
=> la forma quadratica avente quella matrice come matrice ad essa associata in una determinata base dello spazio, è definita positiva.
2) Se i minori principali di NORD-OVEST di ordine k sono positivi per i k pari e negativi per i k dispari, =>
=> la forma quadratica è definita negativa.

Definizione:
La forma quadratica è detta ridotta in forma canonica quando nella sua espressione analitica sono presenti solo i quadrati delle coordinate.

METODO di GAUSS per la riduzione a forma canonica delle forme quadratiche:
(riduzione a quadrati).

Esempio: $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_1 x_2$

• cerco di esprimere $x_1^2 + x_1 x_2$ come somma/differenza di quadrati:

$$x_1^2 + x_1 x_2 = x_1^2 + 2x_1 \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} =$$
$$= \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{2}\right)^2$$

• effettuo un cambiamento di coordinate (ovvero cambio la base).

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{x_2}{2} \\ y_2 = \frac{x_2}{2} \end{cases} \Rightarrow Q((y_1, y_2)) = y_1^2 - y_2^2$$

la segnatura è $(1, 1)$ =>
=> Q è forma quadratica indefinita.

• Trovare la nuova base (ESERCIZIO) per la quale Q è espressa in y_1 e y_2.

Abbiamo dimostrato che data una forma bil. simmetrica $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\exists$ sempre una base $\mathcal{B}$ tale che $[F]_{\mathcal{B}}$ è diagonale e quindi anche $[Q]_{\mathcal{B}}$ è diagonale $\Rightarrow$ in quella base $Q(X) = X^T [Q]_{\mathcal{B}} X = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$

Questa si chiama <u>FORMA CANONICA</u> della forma quadratica.

Vediamo un metodo (di GAUSS) per la riduzione dell'equazione di una quadrica in forma canonica.

Si riduce l'equazione a somma algebrica di quadrati.

sfruttando le identità algebriche $x^2 + 2axy = (x+ay)^2 - a^2y^2$ e $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

Si fa per induzione sul numero delle variabili n.

1) $n=1$ ovvio

2) vale fino a $Q(x_1,\dots,x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i^2$; consideriamo
$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} x_i^2 + \sum a_{ij} x_i x_j$

i) supponiamo che $\exists\ a_{ii} \neq 0$ per qualche i, supponiamo per $i=1$
$\Rightarrow$ scriviamo $Q(X) = a_{11}x_1^2 + R(x_2,\dots,x_n)x_1 + S(x_2,\dots,x_n)$
con R forma lineare ed S forma quadratica $\Rightarrow$
$Q(X) = a_{11}\left(x_1 + \frac{R}{2a_{11}}\right)^2 - \frac{R^2}{4a_{11}} + S$ $\Rightarrow$ faccio un cambiamento
di cordinate $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{R}{2a_{11}} \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ $\Rightarrow Q(Y) = a_{11}y_1^2 + S'(y_2,\dots,y_n)$

con $S'(y_2,\dots,y_n)$ = somma di quadrati, per ipotesi induttiva

ii) Supponiamo che non compaiono x_i^2 né x_j^2, ma $x_i x_j$, ad esempio x_1x_2 $\Rightarrow Q(X) = a_{12}x_1x_2 + R(x_3,\dots,x_n)x_1 + S(x_3,\dots,x_n)x_2 + T(x_3,\dots,x_n)$ con R, S forme lineari, T forma quadratica

$\Rightarrow Q(X) = a_{12}\left(x_1 + \frac{S}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{R}{a_{12}}\right) + T - \frac{RS}{a_{12}}$ $\Rightarrow$ facciamo il

cambiamento di cordinate $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{S}{a_{12}} \\ y_2 = x_2 + \frac{R}{a_{12}} \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ $\Rightarrow Q(Y) = a_{12}y_1y_2 + T - \frac{RS}{a_{12}}$ $\Rightarrow$

$Q(Y) = a_{12}\frac{(y_1+y_2)^2 - (y_1-y_2)^2}{4} + T - \frac{RS}{a_{12}}$ $\Rightarrow$ pongo $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \\ \vdots \\ z_n = y_n \end{cases}$

$\Rightarrow Q(Z) = \frac{a_{12}}{4} z_1^2 - \frac{a_{12}}{4} z_2^2 + T - \frac{RS}{a_{12}}$

$T - \frac{RS}{a_{12}}$ per ipotesi induttiva si può scrivere come somma di quadrati

c.v.d

ESERCIZIO: Data $Q(X) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$ ridurla a forma canonica e descrivere tale forma quadratica

Supponiamo di prendere in $\mathbb{R}^3$ la base canonica

$$\Rightarrow [Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riduciamola a forma canonica con il metodo di Gauss

$$x_1^2 + 2x_1(-2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + x_3^3$$

$$= [x_1 + (-2x_2 + x_3)]^2 - (-2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$= [x_1 - 2x_2 + x_3]^2 - \cancel{4x_2^2} + 4x_2x_3 - \cancel{x_3^2} + \cancel{4x_2^2} + \cancel{x_3^2}$$

$$= [x_1 - 2x_2 + x_3]^2 + 4x_2x_3$$

Un primo cambiamento di coordinate è: $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow = y_1^2 + 4y_2y_3$$

$$= y_1^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2$$

Un secondo cambiamento di coordinate dà $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow = \boxed{z_1^2 + z_2^2 - z_3^2}$$

La forma quadratica è non degenere, indefinita la sua segnatura è $(2, 1)$

Abbiamo effettuato un cambiamento di coordinate dato dalla composizione dei due $\Rightarrow = \begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$

Abbiamo cioè cambiato la base dello spazio ed in questa nuova base $\mathcal{B}$ si ha: $[Q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

La nuova base $\mathcal{B}$ è F_Q-ortogonale, dove F_Q è la forma bilineare polare di Q.

Vediamo determinare tale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Le coordinate dei vettori di tale base saranno le colonne della matrice che dà il cambiamento di base nel passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$; cioè chiamando (x_1, x_2, x_3) le coordinate di $\mathbb{R}^3$ riferite alla base $\mathcal{C}$ e (z_1, z_2, z_3) le coordinate di $\mathbb{R}^3$ riferite alla base $\mathcal{B}$,

avremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

Abbiamo determinato $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

la matrice cercata è la inversa di quella che abbiamo

$\Rightarrow$ o la troviamo così $(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$

oppure troviamo
$$\begin{cases} x_1 = z_1 + \dfrac{z_2}{2} + \dfrac{3}{2} z_3 \\ x_2 = \dfrac{z_2 + z_3}{2} \\ x_3 = \dfrac{z_2 - z_3}{2} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{(1,0,0); (1/2, 1/2, 1/2); (3/2, 1/2, -1/2)\}$

Tale matrice A^{-1} è proprio la matrice S tale che $S^T [Q]_{\mathcal{C}} S = [Q]_{\mathcal{B}}$!