16-1-2013

TEOREMA DELLE DIMENSIONI: $L: V \longrightarrow W$, L lineare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$

DIMOSTRAZIONE: si suppone che ~~[illegible]~~ $B_{\ker L} = \{n_1, \dots, n_k\}$, con

$k \leq \dim V = n$; e si consideri $B_{\operatorname{Im} L} = \{w_1, \dots, w_q\}$, con

$q \leq \dim W$. ~~[illegible]~~

$\Rightarrow \exists\, v_1, \dots, v_q \in V \mid w_j = L(v_j)$ con $j = 1 \dots q$

$\Rightarrow$ voglio dimostrare che $\{v_1, \dots, v_q, n_1, \dots, n_k\}$ è base di V.

Sia $w \in W$ tale che $w \in \operatorname{Im} L \Rightarrow \exists\, v \in V$ tale che $L(v) = w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_q w_q =$

$= \alpha_1 L(v_1) \dots \alpha_q L(v_q) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v) - \alpha_1 L(v_1) - \dots - \alpha_q L(v_q) = 0$

poiché L è applicazione lineare:

$L(v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_q v_q) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_q v_q}_{\text{poiché } \in \ker L} = \beta_1 n_1 + \dots + \beta_k n_k \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q + \beta_1 n_1 + \dots + \beta_k n_k \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \langle\langle v_1, \dots, v_q, n_1, \dots, n_k \rangle\rangle$ cioè V è generato da $v_1, \dots v_q, n_1, \dots n_k$.

Ora si dimostra la loro lineare indipendenza, ponendo la precedente combinazione lineare uguale al vettore nullo.

$\Rightarrow$ VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE (*) $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_q v_q + \nu_1 n_1 + \dots + \nu_k n_k = 0$

l'unica possibilità è che tutti gli scalari siano nulli $\Rightarrow$ si consideri:

$L(\lambda_1 v_1 + \dots + \nu_k n_k) = L(0)$

poiché L è applic. lineare: POSSIAMO SCRIVERE, USANDONE LE PROPRIETÀ:

~~[illegible]~~ $\lambda_1 L(v_1) + \dots + \lambda_q L(v_q) + \nu_1 L(n_1) + \dots + \nu_k L(n_k) = 0$

Si tenga presente la precedente considerazione, che $w_j = L(v_j)$ con $j = 1 \dots q \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_q w_q + 0 + \dots + 0 = 0$

ma $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \lambda_j = 0 \;\forall j = 1, \dots, q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sostituendo $\lambda_j = 0$ in (*) si ha che $\nu_1 n_1 + \dots + \nu_k n_k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ essendo $n_1, \dots, n_k$ linearmente indipendenti $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_k = 0$

Pertanto $\{n_1, \dots, n_k, v_1, \dots, v_q\}$ è base di $V \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V = n = k + q$.

c.v.d

• **PROPOSIZIONE**: Date ~~...~~ $f: V \mapsto W$, lineare, e $g: W \mapsto U$ lineare,

con f, g componibili $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ $\underset{\text{"composto"}}{g \circ f}: V \to U$ è lineare

[dimostrare che $(g \circ f)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (g \circ f)(v_1) + \alpha_2 (g \circ f)(v_2)$]

• **DEFINIZIONE**: Data $f: V \mapsto V$ lineare, f è detta ENDOMORFISMO oppure OPERATORE LINEARE.

• **DEFINIZIONE**: $f: V \mapsto V$ è invertibile se $\exists\ g: V \mapsto V$ lineare tale che $g \circ f =$ identità su V (id_V) e $f \circ g = id_V$

in generale:

$f: V \mapsto W$ è invertibile se $\exists\ g: W \mapsto V$ lineare tale che $g \circ f = id_V$ e $f \circ g = id_W$

• **PROPOSIZIONE**: $f: V \mapsto V$ è invertibile $\Leftrightarrow$ è biettiva (dimostrazione per esercizio)

• **PROPOSIZIONE**: ~~...~~ Siano V e W spazi vettoriali, con $\dim V = n$, $\dim W = m$

Presi $v_1, \dots, v_n$ vettori linearmente indipendenti in V ~~...~~ e $w_1, \dots, w_n$ vettori qualunque in $W \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ L: V \mapsto W$, lineare, tale che $L(v_j) = w_j$, $\forall j = 1, \dots, n$.

dimostrazione: L è data se si conosce l'immagine di un elemento generico v del dominio V. $\Rightarrow$ cerchiamo $L(v)$.

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_2 \Rightarrow$ per linearità di L:

$L(v) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n (v_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ posso costruire L.

esempio: Dati $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$; prendo $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

e $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(w_1 e w_2 presi a caso)

prendo un qualunque elemento di V come combinazione lineare:

$$L(v) = L\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x_1 L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

svolgo tutte le operazioni, ottenendo un unico vettore:

$\downarrow$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad L: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(v_1, v_2) \longmapsto (x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2, x_2)$$

ATTENZIONE! ~~Bisogna~~ se considero vettori di V linearmente dipendenti; ad esempio:

$$v_1, \dots, v_n \mid v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

nel dare le loro immagini $w_1, \dots, w_n$, devo considerare che L deve essere lineare e quindi $L(v_n) = \lambda_1 L(v_1) + \dots + \lambda_n L(v_n)$.

L'unica possibilità di avere un'applicazione lineare è data dal: FRA TALI VETTORI PRENDERE w_n TALE CHE: $w_n = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1}$

esempio: $L: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ se $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ l'unica possibilità per dare L è imporre ad $L(v_2) = 2L(v_1) =$

$= 2w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

dunque $L: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ è TALE CHE $L(x_1, x_2) = ?$ ... PER DETERMINARLO CONSIDERIAMO UNA BASE $\{a_1, a_2\} \mid v_1 = a_1 + 2a_2$ e $v_2 = 2a_1 + 4a_2$; $w_1 = -a_1 + a_2$ e $w_2 = -2a_1 + 2a_2$

$\Rightarrow$ Impongo: $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = L(a_1 + 2a_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -a_1 + a_2 \overset{\text{I}}{\Rightarrow}$

$L\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = L(2a_1 + 4a_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2a_1 + 2a_2 \overset{\text{II}}{\Rightarrow}$

$$\begin{cases} \overset{\text{I}}{\Rightarrow} L(a_1) + 2L(a_2) = -a_1 + a_2 \\ \overset{\text{II}}{\Rightarrow} 2L(a_1) + 4L(a_2) = -2a_1 + 2a_2 \end{cases}$$

si risolve il sistema ponendo come incognite $L(a_1)$ e $L(a_2)$

Ora la II equazione è inutile perché è il doppio della I:

$$\begin{cases} L(a_1) = -2L(a_2) - a_1 + a_2 = -a_1 \\ \text{pongo } L(a_2) = \dfrac{a_2}{2} \end{cases}$$

$$L(x_1 a_1 + x_2 a_2) = x_1 L(a_1) + x_2 L(a_2) = -x_1 a_1 + x_2 \frac{a_2}{2} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2/2 \end{pmatrix}$$

allora $L: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \left(-x_1, \frac{x_2}{2}\right)$$

ATTENZIONE: l'applicazione trovata è espressa IN BASE A VETTORI LE CUI COORDINATE SONO SEMPRE espresse in base canonica, sia nel dominio che nel codominio dell'applicazione.

• PROPOSIZIONE: Sia $L: V \longmapsto W$, lineare, iniettiva ($\ker L = \{0\}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ posto $\dim V = n$ e $\dim W = m$, dati $v_1, \dots, v_k$ vettori di V linearmente indipendenti; $L(v_1), \dots, L(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

dimostrazione: considero $\alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_k L(v_k) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ per la linearità di L:

$$L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in \ker L$

tuttavia L è iniettiva, cioè $\ker L = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

ma per ipotesi $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti e quindi $\alpha_j = 0 \ \forall j = 1 \dots k$.

Pertanto $L(v_1), \dots, L(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO: Creare un'applicazione lineare che mande vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente dipendenti:

[cioè si pone un'applicazione non iniettiva]

CONSIDERIAMO $L: V \longmapsto W$, lineare ($\dim V = n$ e $\dim W = p$) se conosciuta se si sanno le immagini dei vettori di base, poiché cerchiamo $L(v)$, con $v \in V \Rightarrow v$ è COMBINAZIONE LINEARE DI ELEMENTI DI BASE $\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ con $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v) = \alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n L(v_n)$.

Se conosco $L(v_j) = w_j = (w_{1j}, w_{2j}, w_{3j}, \dots, w_{pj}) \ \forall j = 1 \dots n \Rightarrow$ conosco $L(v)$.

$L(v) = \alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n L(v_n) \Rightarrow$ PONENDO $L(w) = (y_1, \dots, y_p)$

SI HA:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}}_{\text{dato}} = \alpha_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{p1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{p2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} w_{13} \\ w_{23} \\ \vdots \\ w_{p3} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} w_{1n} \\ w_{2n} \\ \vdots \\ w_{pn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

sono variabili incognite.

$\Rightarrow$ POSSO RISCRIVERE L'EQUAZIONE VETTORIALE, COME UN SISTEMA SCALARE IN FORMA MATRICIALE

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{p1} & w_{p2} & w_{p3} & \dots & w_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

L'applicazione è DATA matricialmente, a condizione che siano fissate le basi $\Rightarrow$

=> Date $L: V \longmapsto W$, fissate le basi B_V e B_W e supponendo:

$\dim V = n$
$\dim W = m$ =>

=> ad L si associa una matrice $A \in M_{p \times n}$ che indicheremo $[L]^{B_W}_{B_V}$ che è ottenuta mettendo in colonna i coefficienti delle combinazioni lineari, espresse nella base B_W, che sono le immagini ~~delle~~ tramite L dei vettori di base di V. =>

$$\Rightarrow [L(v)]_{B_W} = [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [v]_{B_V}$$

FARE ESEMPIO $\quad \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y, y)$ => CONSIDERIAMO UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$

$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ => $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto (3,1,1) =$ { => $(3,1,1)$ è data dalla base canonica } =>

=> data $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ => $= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$ => da trovare => $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto (0, 2, 1) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$ => $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ => FORMA LA SECONDA COLONNA DELLA MATRICE

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} = [L]^{B_W}_{B_V}$$