Operatori fra spazi euclidei.

Definizione: Dato un operatore $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, invertibile, definiamo T un operatore ISOMETRICO se $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$, $T(u)\cdot v = u \cdot T^{-1}(v)$. (*)

Il nome stesso indica che l'operatore mantiene la struttura "la metrica", cioè la distanza definita attraverso la NORMA (sempre in uno spazio euclideo), tra due punti... DELLA DIFFERENZA DEI RISPETTIVI VETTORI.
La distanza fra due punti non varia CONSIDERANDO QUELLA fra le immagini di questi punti.
Si parla semplicemente di MOVIMENTI RIGIDI.
Da questo studio rimane fuori la TRASLAZIONE, poiché non è un operatore (infatti non è lineare).

=> Proposizione: 1) Dati $u, v \in \mathbb{R}^n$, euclideo, $\Rightarrow u \cdot v = T(u)\cdot T(v)$, se T è isometrico.

2) Se T è isometrico $\Rightarrow \|v\| = \|T(v)\|$

3) Se T è isometrico $\Rightarrow \cos(\widehat{u,v}) = \cos(\widehat{T(u),T(v)})$.

DIMOSTRAZIONE:

1) Si considera:
$u\cdot v = u \cdot T^{-1}(T(v)) = T(u)\cdot T(v)$ (*) (Att! T è biettivo ~~invertibile~~)

2) Si considera: $\|u\| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{T(u)\cdot T(u)} = \|T(u)\|$

3) Si considera: $\underbrace{u\cdot v = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos(\widehat{u,v})}\ = T(u)\cdot T(v) = \underbrace{\|T(u)\|\cdot\|T(v)\|\cdot\cos(\widehat{T(u),T(v)})}$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\|u\|}\cdot\cancel{\|v\|}\cdot\cos(\widehat{u,v}) = \cancel{\|T(u)\|}\cdot\cancel{\|T(v)\|}\cdot\cos(\widehat{T(u),T(v)})$$

c.v.d.

Proposizione: 1) Se U è sottospazio invariante per T isometrico $\Rightarrow U$ è invariante per T^{-1}

2) Se U è sottospazio invariante per T isometrico $\Rightarrow$ il suo complemento ortogonale è invariante per T.

DIMOSTRAZIONE:

1) Dato $u \in U \Rightarrow T(u) \in U$. Considero che se un elemento $w \in U \Rightarrow T^{-1}(w) \in U$.
per la biettività: $T^{-1}(T(U)) = U$, ma anche $T(U) = U \Rightarrow T^{-1}(U) = U$. $\Rightarrow U$ è sottospazio invar. per T^{-1}.

2) Voglio dimostrare che $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$, cioè che $\forall\, w \in U^\perp$, $T(w) \in U^\perp$.
$w \in U^\perp$ se $\forall\, u \in U$ $u \cdot w = 0$.
Considero ora $T(w)$ PER $T(w)\cdot u$: SI HA $T(w)\cdot u = w \cdot T^{-1}(u) = 0$ PERCHÈ:
(per la definizione di operatore isometrico)
$T^{-1}(u) \in U$ INQUANTO U è invariante per T^{-1} per il punto 1) $\Rightarrow$ è invariante $U^\perp$ per T, ESSENDO $T(w) \in U^\perp$ POICHÉ $T(w)\cdot u = 0\ \forall\, u \in U$.

c.v.d.

~

Quali sono i possibili autovalori di un operatore isometrico?

Cerco i $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow T(v) = \lambda v$ per qualche $v \neq 0$

So che: $T(v) \cdot T(v) \left(= \|T(v)\|^2\right) = v \cdot v = \|v\|^2$

pongo $T(v) = \lambda v \Rightarrow$ $\lambda v \cdot \lambda v = \|\lambda v\|^2 = |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \Rightarrow \|T(v)\| = |\lambda| \cdot \|v\| = \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

estraendo le radici

ciò è possibile per $|\lambda| = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

gli unici autovalori possibili di un operatore isometrico sono ± 1.

Ora studio la matrice associata all'operatore T.

Prima di tutto fisso una base in $\mathbb{R}^n$ ortonormale $B_{\perp n}$ ~~...~~

$\Rightarrow$ sia $A = [T]_{B_{\perp n}}$

Sappiamo che dati i vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$, e $T(u) \cdot v = u \cdot T^{-1}(v)$ perché T isometrico.

Siano: $X = [u]_{B_{\perp n}}$ e $Y = [v]_{B_{\perp n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow T(u) \cdot v = (A \cdot X)^T \cdot B \cdot Y$

con B = matrice associata alla forma bilineare (il prodotto scalare).

In questo caso $B = I$ (avendo scelto una base ortonormale) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (AX)^T \cdot Y = X^T A^T Y$.

Poiché T isometrico: $T(u) \cdot v = u \cdot T^{-1}(v)$. Dunque:

$$u \cdot T^{-1}(v) = X^T \cdot I \cdot A^{-1} Y = X^T A^{-1} Y$$

[vero $\forall u, v$]

Dunque ho $\forall X \in Y$: $X^T A^T Y = X^T A^{-1} Y \Rightarrow$

$\Rightarrow A^T = A^{-1}$

(questo in una base ortonormale)

<u>Definizione</u>: Una matrice quadrata $A \mid A^T = A^{-1}$ o in altre parole $A \cdot A^T = I$, si dice ORTOGONALE.
$\overset{!}{=} A^T \cdot A = I$

La matrice associata ad un operatore isometrico in una base ortonormale dello spazio è ortogonale.

Inoltre $\det A \neq 0$ perché T è operatore invertibile $\Rightarrow$ cerco $\det A$. So che $A \cdot A^T = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A \cdot A^T) = \det I$. Per Binet: $|A||A^T| = 1 \Rightarrow$ essendo $|A^T| = |A| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| = \pm 1$

Att! non è vero il viceversa!

Una matrice può avere determinante $= \pm 1$ senza essere ortogonale.

Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I$

A non è ortogonale.

$\boxed{\text{ESERCIZIO:}}$ Si dimostri che ~~i~~ vettori colonna di A ortogonale sono ortonormali (e che i vettori riga di A ortogonale sono ortonormali).

Che tipo di trasformazioni geometriche sono gli operatori isometrici?

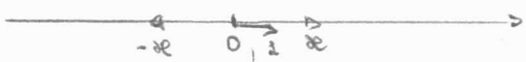
in $\mathbb{R}^1$: Si prende $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ isometrico $\Rightarrow T(x) = \lambda x$.
$x \longrightarrow \lambda x$

Se T è isometrico, $\lambda = \pm 1 \Rightarrow$ gli operatori isometrici su $\mathbb{R}$ sono di due tipi:

- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = -x$

$T_1(x) =$ identità $= id_{\mathbb{R}}$

$T_2(x) =$ simmetria rispetto all'origine



presa la base ortonormale $B_{\perp n}$

$[id_{\mathbb{R}}] = (1)$

$[T_2]_{B_{\perp n}} = (-1)$

sono le uniche matrici per operatori isometrici in $\mathbb{R}$.

in $\mathbb{R}^2$ si prende $T: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ isometrico

$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ → la matrice è ortogonale!

Impongo ad A di essere ortogonale $\Rightarrow$

ciò implica una serie di considerazioni

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - cb = \pm 1 \end{cases}$$

ho 4 equazioni per 4 incognite

faccio delle supposizioni:

- se $b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 = 1 \\ c \cdot d = 0 \\ a \cdot d = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = \pm 1 \\ c = 0 \\ ? \end{cases}$$

- se $d = +1$ $\Rightarrow$ possiamo avere $a = +1$ oppure $a = -1$
- se $d = -1$ $\Rightarrow$ possiamo avere $a = -1$ oppure $a = +1$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Id}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- se $b \neq 0$

$$\begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ b^2 + d^2 = 1 \\ \frac{c^2 d^2}{b^2} + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c^2 d^2 + c^2 b^2 = b^2$$

$c^2(b^2 + d^2) \overset{!}{=} b^2 \Rightarrow c^2 = b^2 \Rightarrow c = \pm b$

- se $c = b \Rightarrow a = -d \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \Rightarrow -a^2 - b^2 = -1$
- se $c = -b \Rightarrow a = d \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + b^2 = +1$

dunque in questo caso ho le matrici

↳ perché $a^2+b^2=1$ → posso prendere $a=\cos\vartheta$ e $b=\operatorname{sen}\vartheta$ ⇒

⇒ le ultime due matrici sono:

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ +\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

↳ con det = 1 ↳ con det = -1

Ora si studiano queste 6 matrici: prendendo un vettore qualunque:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ +\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ +\operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

- banale (perché = Id)
- simmetria rispetto all'asse y
- simmetria rispetto all'asse x
- simmetria rispetto all'origine
- rotazione rispetto ad un angolo ϑ
- composizione di rotazione + simmetria

(simmetrie rispetto agli assi) scambiando le basi ho rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

(simmetria rispetto all'origine) è la composizione delle 2 simmetrie precedentemente studiate

(pertanto sono la medesima trasformazione ottenuta scambiando i vettori della base e formando così la nuova base)

Per $\mathbb{R}^2$ si avranno semplicemente 2 sole trasformazioni, le simmetrie e le rotazioni, nonché le loro composizioni.