15/04/2013

Una forma $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$, V spazio ~~dimens~~ vettoriale n-dimensionale, è detta <u>QUADRATICA</u> se sono verificate le condizioni:

(1) $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(2) definita una forma del tipo $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:
$F((v, \omega)) = Q(v+\omega) - Q(v) - Q(\omega) \Rightarrow F$ è bilineare simmetrica

Es.

$$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{è una forma quadratica?}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 x_2$$

Verifica:

1) $Q(\alpha v) = Q((\alpha x_1, \alpha x_2)) = \alpha^2 x_1 x_2 = \alpha^2 Q(v)$

2) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = Q(x_1+y_1, x_2+y_2) - Q(x_1, x_2) - Q(y_1, y_2) =$
$= (x_1+y_1)(x_2+y_2) - x_1 x_2 - y_1 y_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$ è forma bilineare,

è simmetrica?

$F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto y_1 x_2 + y_2 x_1$, sono uguali pertanto è SIMMETRICA

Posso costruire, a partire da Q, una forma bilineare simmetrica F_Q "particolare" cioè tale che $F_Q((v, v)) = Q(v)$ $\forall v \in V$. Essa esiste sempre ed in un campo K con char. (caratteristica) $K \neq 2$, è fatta nel seguente modo:

$$F_Q((v, \omega)) = \frac{Q(v+\omega) - Q(v) - Q(\omega)}{2} \qquad \text{Infatti:}$$

$$F_Q((v, v)) = \frac{Q(v+v) - Q(v) - Q(v)}{2} = \frac{Q(2v) - 2Q(v)}{2} = \frac{4Q(v) - 2Q(v)}{2} = Q(v)$$

②
<u>Definizione</u>: $F_Q: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta <u>FORMA POLARE</u> della forma quadratica $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Proposizione</u>: La forma polare di una forma quadratica è unica (esercizio) ... [HINT: supponete che $\exists \tilde{F}: V \times V \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{F}((v,v)) = Q(v) \Rightarrow \tilde{F} \equiv F_Q \Rightarrow Q(v+w) = \tilde{F}((v+w, v+w)) = \dots$]

Sia ora una forma bilineare simmetrica $F: V \times V \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ posso costruire
$$Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto F((v,v))$$
$\Rightarrow Q$, così definita, è una forma quadratica (verificare).

Posso costruire un'applicazione φ: ~~$\{F: V\times V \to \mathbb{R}$ bil. simm$\}$~~
$$\varphi: \{F: V \times V \to \text{bil. simm}\} \longrightarrow \{Q: V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ quadratica}\}$$
$$F \longmapsto Q$$
φ è biettiva e
$$\varphi^{-1}: \{\underset{\text{QUAD}}{Q: V \longrightarrow \mathbb{R}}\} \longrightarrow \{\underset{\text{BIL. SIMM}}{F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}}\}$$
$$Q \longmapsto F_Q$$

Infatti
$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(Q) = \varphi(\varphi^{-1}(Q)) = \varphi(F_Q) = Q \Rightarrow \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\{Q: V \to \mathbb{R}\}}$$
$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)(F) = \varphi^{-1}(\varphi(F)) = \varphi^{-1}(Q) = F_Q = F \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi = id_{\{F: V\times V \to \mathbb{R}\}}$$

In virtù della corrispondenza φ costruita, possiamo associare ad una forma quadratica una matrice quadrata $[Q]_{B_V}$ fissata una base di V, B_V: IN QUESTO MODO:

ponendo $[Q]_{B_V} = [F_Q]_{B_V}$

③ Così, ad esempio, $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 x_2$

Fissata C base canonica di $\mathbb{R}^2$, costruiamo $[Q]_C$

$$F_Q((v,\omega)) = \frac{Q(v+\omega) - Q(v) - Q(\omega)}{2} = \left(\text{posto } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ e } \omega = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{2} \Rightarrow [F_Q]_C = \begin{pmatrix} F_Q((e_1,e_1)) & F_Q((e_1,e_2)) \\ F_Q((e_2,e_1)) & F_Q((e_2,e_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Metodo per costruire $[Q]_C$ a partire da Q: $[Q]_C \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$\Rightarrow$ posto $[Q]_C = (a_{ij})$ $\forall i \neq j$ a_{ii} = Coefficienti dei termini x_i^2 nella sua espressione cartesiana; a_{ij} = Coefficiente del monomio di parte letterale $x_i x_j$, fratto 2.

Nell'esempio dato $[Q]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. DALLA MATRICE $[Q]_C$ POSSIAMO RICOSTRUIRE LA FORMA QUADRATICA:

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ x_1 & 0 & 1/2 \\ x_2 & 1/2 & 0 \end{array} \qquad Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\, x_1 x_1 + \frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 x_1 + 0\, x_2 x_2 = x_1 x_2$$

E LA FORMA BILINEARE POLARE F_Q

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ x_1 & 0 & 1/2 \\ x_2 & 1/2 & 0 \end{array} \qquad F_Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 0\, x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + 0\, x_2 y_2 = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{2}$$

È UN MODO VELOCE CHE PUÒ SOSTITUIRE LA DEFINIZIONE:

$$F((x,y)) = X^T A y = X^T [F_Q] Y$$

(4)

Si danno per le forme quadratiche le nozioni, date per le forme bilineari simmetriche, di forma degenere, definita positiva, positiva, etc...

<u>Teorema</u>: (di Silvester o di inerzia per le forme quadratiche reali)

Data una forma bilineare simmetrica reale $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ con Rango $F = r$, $\exists$ una base F-ortogonale di V | $[F]_{B\perp} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & 0 \\ & & 1 & & & \\ 0 & & & -1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & -1 & 0 \\ 0 & & 0 & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$

Il numero di "+1" e "-1" sulla diagonale sono invarianti della forma quadratica associata ad F.