Andrea Bacchiani 14/11/12

<u>Proposizione</u>

In uno spazio vettoriale V n-dimensionale, consideriamo r vettori linearmente indipendenti $v_1, \dots, v_r \Rightarrow \exists$ $n-r$ vettori di V

$w_1, \dots, w_{n-r}$ tali che $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots w_{n-r}\}$ sia una base di V

<u>Dimostrazione</u>

Consideriamo lo spazio generato da $\langle\langle v_1, \dots, v_r \rangle\rangle = V_1$

$V_1 = V$ oppure $V_1 \subset V$

(1) Se $V_1 = V$ allora la base cercata è $\{v_1, \dots, v_r\}$

(2) Se $V_1 \subset V$ allora $\exists\, w_1 \in V \setminus w_1 \notin V_1 \Rightarrow w_1 \notin \langle\langle v_1, \dots v_r \rangle\rangle$

cioè w_1 non è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_r \Rightarrow w_1, v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

$\Downarrow$

Considero il sottospazio $V_2 = \langle\langle w_1, v_1, \dots v_r \rangle\rangle$

$V_2 = V$ oppure $V_2 \subset V$

Se $V_2 = V$ allora la base cercata è $\{w_1, v_1, \dots v_r\}$

Se $V_2 \subset V$ allora $\exists\, w_2 \in V \setminus w_2$ non è combinazione lineare di $w_1, v_1, \dots, v_r$

$\Rightarrow w_2, w_1, v_1, \dots, v_r$ sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ considero V_3

$V_3 = \langle\langle w_1, w_2, v_1, \dots, v_r \rangle\rangle$

Se $V_3 = V \Rightarrow$ la base cercata è $\{w_1, w_2, v_1, \dots, v_r\}$

Se $V_3 \subset V$ si prosegue analogamente

~~Lo spazio Vettoriale delle n-uple ha dim n~~

~~quindi~~ Il ragionamento ha termine quando arriviamo ad avere un numero di vettori linearmente indipendenti pari ad n, CHE SI RAGGIUNGE PERCHÈ LA DIMENSIONE n DELLO SPAZIO VETTORIALE È FINITA.

Proposizione

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale, con n finito, presi $n+1$ vettori di V, $v_1, \dots, v_{n+1}$ allora $\underbrace{\text{tali vettori sono linearmente dipendenti}}_{\text{Tesi}}$.

Dimostrazione

Poniamo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$

I coeff. della combinazione lineare sono le coordinate dei vettori nella base considerata.

Supposta $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di $V \Rightarrow$ possiamo considerare le coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ di ogni vettore di V nella base data e scriveremo $[v]_B$

$$\underbrace{[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{coordinate di } v \text{ nella base } B}$$

quindi

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$ posso scriverlo in questo modo:

$$\alpha_1 [v_1]_B + \alpha_2 [v_2]_B + \dots + \alpha_n [v_n]_B + \alpha_{n+1} [v_{n+1}]_B = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} + \alpha_{n+1} \begin{pmatrix} x_{1\,n+1} \\ \vdots \\ x_{n\,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

indice riferito alle coordinate

indice riferito al vettore

$$\Rightarrow \quad \Sigma_0 : \begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \dots + \alpha_{n+1} x_{1,n+1} = 0 \\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_{n+1} x_{2,n+1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 x_{m1} + \alpha_2 x_{m2} + \dots + \alpha_{n+1} x_{m,n+1} = 0 \end{cases}$$

Le incognite di Σ_0 sono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$

quante $(n+1)$ - uple sono soluzioni di Σ_0?

(diverse dalla soluzione di soli zeri.)

$\Rightarrow$ la matrice dei coefficienti è $A \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{m,n+1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $rg\, A < n+1$ ~~[illegible]~~

$\Downarrow$

Sono presenti soluzioni non nulle, perché ESSE sono ∞^{n+1-r} con $n+1-r > 0$

$\Rightarrow$ I VETTORI $v_1, \dots, v_{n+1}$ SONO LIN. DIPENDENTI. C.V.D.

<u>Proposizione</u> Ogni base di uno spazio vettoriale è formata dallo stesso numero di vettori.

<u>Corollario della proposizione precedente</u>

è una conseguenza immediata della proposizione precedente.

<u>Dimostrazione</u>

Dimostrazione per assurdo: nego la Tesi per poi giungere ad un risultato impossibile.

quindi Consideriamo due basi dello spazio vettoriale V considerato, con un numero diverso di elementi.

Ipotesi: $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_k\}$ con $n \neq k$

Supponiamo che $n < k$ e fisso ~~come~~ B_1 come base di V. quindi

B_2 è formata da vettori linearmente dipendenti (poiché sono $k > n$)

Per ipotesi B_2 è base di V, quindi formata da vettori lin. indipendenti
quindi sono giunto ad un Assurdo $\Rightarrow$ è sbagliato supporre $n < k$

Poniamo $n > k$ quindi Assumo B_2 come base di V $\Rightarrow$ B_1 è formata

da vettori linearmente dipendenti per la prop. precedente. ESSENDO ORA $n > k$.

Ma ciò è assurdo perché per ipotesi B_1 è base di V.
Quindi è sbagliato supporre $n > k$

$n > k \longrightarrow$ Assurdo
$n < k \longrightarrow$ Assurdo
Quindi è sbagliato supporre $n \neq k$

quindi $n = k$ dove n $(= k)$ indica la dim. dello spazio.

Esercizio

Dati i vettori $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^4$ con $[V_1]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

e con $[v_2]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\mathcal{E}$ base canonica di $\mathbb{R}^4$

dopo aver verificato che dim. $<< V_1, V_2 >> = 2$, completare $\{V_1, V_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$

dimostro che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. $\searrow$ in questo modo dimostro che $<<V_1, V_2>>$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

v_1 e v_2 sono generatori di $<< V_1, V_2 >>$ e $V_1 V_2$ sono linearmente indipendenti perché non sono multipli l'uno dell'altro.

PRENDIAMO UN TERZO VETTORE, AD ESEMPIO $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considero un minore di ordine 3

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

quindi $Rg = 3$

Sono lin. indipendenti

ORA AGGIUNGO AI TRE UN QUARTO VETTORE: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne calcolo il determinante rispetto all'ultima colonna

$$|A| = -2 \neq 0$$

Sono lin. indipendenti

$$Rg = 4$$

Ho completato $\{V_1, V_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Considero $AX = 0$ con $A \in \mathcal{M}_{k \times n}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Considero alcuni sottospazi vettoriali ad esso associati

retta
|
piano
|
Spazio 3D
⋮

(1) $Sol\ \Sigma_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad Sol\ \Sigma_0 = \{$ soluzioni del sistema $AX = 0 \}$

Tale spazio non varia con le operazioni elementari riga sulle matrici equivalenti.

Esercizio per casa

(2) Data $A \in \mathcal{M}_{k \times n}$ si considerino gli spazi:

- Spazio riga di $A = \langle\langle R_1, \dots, R_k \rangle\rangle$: CON R_i RIGHE DI A
- Spazio colonna di $A = \langle\langle C_1, \dots, C_n \rangle\rangle$: CON C_j COLONNE DI A

- Dimostrare che sono sottospazi vettoriali e determinare di quale spazio lo è.
- dire se e come le operazioni elementari riga di A li cambiano..