Proposizione: 14-01-13

Sia $\varphi : V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali con $\dim V = n$ e $\dim W = m \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$

Dimostrazione:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \langle\langle u_1, \dots, u_k \rangle\rangle \quad \to V = \langle\langle u_1, \dots, u_k, e_{k+1}, \dots, e_n \rangle\rangle$$
$$\operatorname{Im}\varphi = \langle\langle w_1, \dots, w_q \rangle\rangle$$

$(\varphi(u_1), \dots, \varphi(e_n)) \Rightarrow$ generano $\operatorname{Im}\varphi$.

infatti: $w \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists\, v \in V \mid \varphi(v) = w \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \dots \alpha_k u_k + \beta_{k+1} e_{k+1} + \dots + \beta_n e_n$$
$$w = \varphi(v) = \varphi(\alpha_1 u_1) + \dots + \varphi(\beta_n e_n) =$$
$$= \alpha_1 \varphi(u_1) + \dots + \beta_n \varphi(e_n).$$

~ ~ ~ DA RIGUARDARE

$\exists$ applicazioni lineari iniettive $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\varphi_1 + \dim \operatorname{Im}\varphi_1 = 3$

ma $\operatorname{Im}\varphi_1 \subsetneq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi_1$ al massimo SARÀ 2

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi_1$ non può essere formato dal solo 0 e φ_1 NON È INIETTIVA, ed anche $\forall \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ con $m > k$!! NON PUÒ ESSERE INIETTIVA!

$\exists$ applicazioni lineari suriettive $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi_2 + \dim \operatorname{Ker}\varphi_2 = 2$

ma se φ_2 suriettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi_2 = \dim \mathbb{R}^3$ e quindi non può soddisfare il teorema delle dimensioni

$\nexists$ applicazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$ se $n < k$.

Per ottenere un isomorfismo fra due spazi vettoriali è necessario che essi abbiano uguali dimensioni:

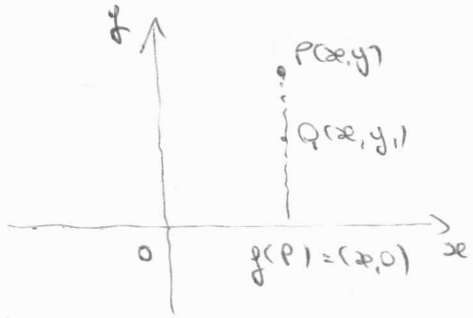
$\Rightarrow \exists$ isomorfismi di spazi vettoriali solo se dim dominio coincide con dim codominio.

Si possono avere applicazioni lineari fra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ senza che queste siano isomorfismi.

(continuo) esempio: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

proiezione ortogonale sull'asse delle x.

(essa non è biiettiva).



Sia V un sottospazio vettoriale n-dimensionale e B_V base di V =>

=> $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ =>

=> se $v \in V$ => $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ =>

=> considero l'applicazione $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$

$$v \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

φ è lineare (da fare), φ è isomorfismo (da fare)

att! : l'isomorfismo dipende dalla base B_V di V, in quanto vengono considerate ennuple di scalari, DIVERSE PER UN VETTORE v COME COORDINATE DEL VETTORE RELATIVE ALLA DETERMINATA BASE => esse determinano l'applicazione.

pertanto questo è un isomorfismo NON CANONICO e dipendente dalla BASE dello spazio vettoriale

ESEMPIO

$M_{2\times2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ CONSIDERIAMO LA BASE

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$+ d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. => CONSIDERO LA quaterna di $\mathbb{R}^4$, (a,b,c,d) corrispondente ad $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

E POSSO DETERMINARE $\varphi: M_{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a,b,c,d)$$

CHE È ISOMORFISMO

$\Longrightarrow$ allora $\boxed{\mathbb{R}^4 \cong M_{2\times2}(\mathbb{R})}$

Esercizio: dimostrare la composizione di due APPLICAZIONI lineari è APPLICAZIONE lineare