1

Sia Σ un sistema lineare non omogeneo non risolubile

$\Sigma: AX = B$ $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow rg(A) < \#$ equazioni

(ricordo che se $rg\, A = \#$ equazioni di $\Sigma \Rightarrow \Sigma$ è sempre risolubile)

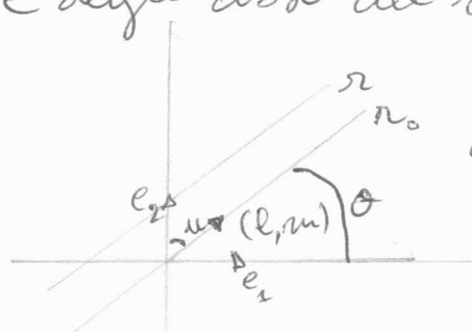
Σ può essere scritto in questa forma

$x_1 C^1 + x_2 C^2 + \dots + x_n C^n = B$ dove $C^j_{j=1,2,\dots,n}$ sono le colonne di A

$\Rightarrow$ B non è combinazione lineare delle colonne di A $\Rightarrow B \notin \langle\langle C^1, \dots, C^n \rangle\rangle \Rightarrow$ cerco un nuovo vettore dei termini noti D che $\in \langle\langle C^1, \dots, C^n \rangle\rangle$ e sia "il + più vicino possibile" a B

$\leftarrow \langle\langle C^1, \dots, C^n \rangle\rangle = U \Rightarrow$ il vettore D è la proiezione ortogonale di B su U perché D è il vettore di U a "distanza minima da B". Tale distanza è data dalla norma di h con $B = D + h$ ed $h \perp U$. Tale $\|h\|$ sarà l'errore commesso nel sostituire D a B in Σ

Definizione: In ($\mathbb{R}^2$, euclideo) diciamo COSENI DIRETTORI di una retta r sono i coseni degli angoli che r forma con le semirette positive degli assi del sistema di riferimento



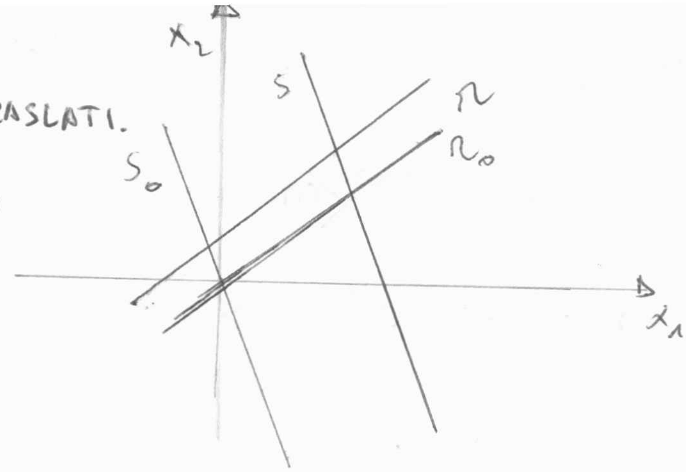
$\cos\theta = u \cdot e_1 / \|u\|$
$\cos \widehat{u e_2} = u \cdot e_2 / \|u\|$

IN DIMENSIONE QUALUNQUE

Definizione: due spazi affini sono perpendicolari se lo sono i corrispondenti sottospazi vettoriali di cui essi

SONO I TRASLATI.

ESEMPIO:



TORNIAMO IN $\mathbb{R}^2$: Detti (l_r, m_r) ed (l_s, m_s) i parametri direttori di r ed s (RETTE IN $\mathbb{R}^2$) rispettivamente $\Rightarrow r \perp s \Leftrightarrow (l_r, m_r) \cdot (l_s \cdot m_s) = 0$ cioè

$l_r l_s + m_r m_s = 0$

Se considero l'equazione cartesiana di una retta $r: ax + by + c = 0$

$\Rightarrow r_0: ax + by = 0 \Rightarrow ax + by = (a,b) \cdot (x,y) = 0 \Rightarrow (a,b)$ è un vettore $\perp$ ad ogni vettori di $r_0 \Rightarrow$ DOTE DUE RETTE r ED s: $r: ax + by + c = 0$ ed s $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

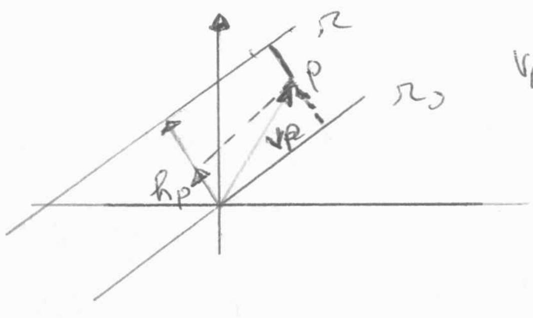
$\Rightarrow r \perp s \Leftrightarrow (a,b) \cdot (a_1, b_1) = 0 \Rightarrow a a_1 + b b_1 = 0$

caso particolare $r: y = m_1 x + q_1$ ed $s: y = m_2 x + q_2 \Rightarrow r: m_1 x - y + q_1 = 0$

$s = m_2 x - y + q_2 = 0 \Rightarrow r \perp s \Leftrightarrow (m_1, -1)(m_2, -1) = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = 1$

Esercizio: Determinare la formula delle distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta r $ax + by + c = 0$

In $\mathbb{R}^3$



$v_P = g_P + h_P$

IN $\mathbb{R}^3$

1) DATE $r: \begin{cases} x = tl + x_1 \\ y = tm + y_1 \\ z = tn + z_1 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x = tl_1 + x_2 \\ y = tm_1 + y_2 \\ z = tn_1 + z_2 \end{cases} \Rightarrow$

$r \perp s \iff (l, m, n) \cdot (l_1, m_1, n_1) = 0 \iff ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$

2) Data $r: \begin{cases} x = tl + x_1 \\ y = tm + y_1 \\ z = tn + z_1 \end{cases}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow$

$\pi_0 : ax + by + cz = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow (a, b, c) \perp (x, y, z)$

$\forall (x, y, z) \in \pi_0 \Rightarrow (l, m, n) = \lambda (a, b, c) \iff \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$

Se $\pi: \begin{cases} x = s\alpha_1 + t\beta_1 + x_0 \\ y = s\alpha_2 + t\beta_2 + y_0 \\ z = s\alpha_3 + t\beta_3 + z_0 \end{cases}$ con $\pi_0 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \Rightarrow$

$r \perp \pi \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$

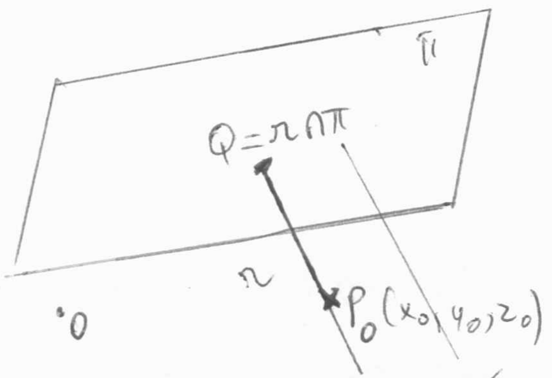
Analizzate gli altri casi con equazioni della retta e del piano in altre forme (esercizio)

3) $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ e $\pi_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

$\Rightarrow (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ e $(a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2 \iff$

$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

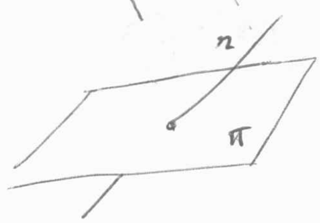
Esercizio 1) DATO UN PUNTO $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ED UN PIANO π



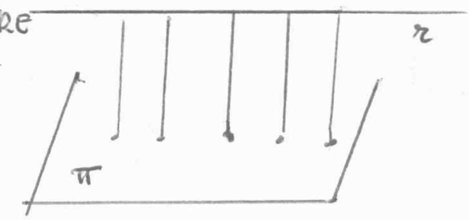
$$\pi : \begin{cases} x = ta + x_0 \\ y = tb + y_0 \\ z = tc + z_0 \end{cases}$$

DETERMINARE LA DISTANZA DI P_0 DAL PIANO π.

Esercizio 2)



DETERMINARE la distanza tra la retta e il piano



QUANDO LA RETTA È INCIDENTE E QUANDO È // a π.

ESERCIZIO 3) DETERMINARE LA DISTANZA TRA DUE RETTE: 1) INCIDENTI ; 2) PARALLELE ; 3) sghembe (non stanno nello stesso piano)

(come vuoi il modo da risolvere)

RICORDO CHE: tra rette sghembe LA DISTANZA È LA MINIMA DELLE DISTANZE FRA I PUNTI DELLE DUE RETTE.